Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
13 mars 2019

NOM . . . . **Prénom** . . . . N. étudiant . . . .

Analyse pour l'économie 2. Contrôle continu N. 1.

La durée de totale de l'epreuve est d'une heure. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

— Feuilles de brouillon jaunes : **traiter uniquement les questions "jaunes"**.
— Feuilles de brouillon bleus : **traiter uniquement les questions "bleus"**.

Exercice 1.

Jaune Écrire la solution générale de l'équation différentielle $y^{(4)} - 16y = 0$. Trouver ensuite toutes les solutions vérifiant $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

Bleu Écrire la solution générale de l'équation différentielle $y^{(4)} - 16y'' = 0$. Trouver ensuite toutes les solutions vérifiant $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

. . . .

Solution Jaune Il s'agit d'une équation linéaire d'ordre 4, à coefficients constants et homogène. La solution générale est un espace vectoriel de dimension 4.
Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^4 - 16 = (\lambda^2 + 4)(\lambda^2 - 4)$, qui possède les 4 racines $\lambda = 2, -2, 2i, -2i$.
La solution générale est alors

$$y(x) = ae^{2x} + be^{-2x} + c\cos(2x) + d\sin(2x), \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

On a $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ si et seulement si $a = c = d = 0$, donc si et seulement si $y(x) = be^{-2x}$, avec $b \in \mathbb{R}$. . . . .

Solution Bleu Il s'agit d'une équation linéaire d'ordre 4, à coefficients constants et homogène. La solution générale est un espace vectoriel de dimension 4. Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^4 - 16\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 16)$, qui possède les 4 racines $\lambda = 0$ (racine double) et $\lambda = \pm 4$. La solution générale est alors

$$y(x) = a + bx + ce^{4x} + de^{-4x}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

On a $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ si et seulement si $a = b = c = 0$, donc si et seulement si $y(x) = de^{-4x}$, avec $d \in \mathbb{R}$.

. . . .

. . . .

Exercice 2.

Jaune Démontrer que, dans un espace métrique, toute suite de Cauchy est bornée. Donner ensuite un exemple d'une suite bornée, non de Cauchy.

Bleu Démontrer que, dans un espace métrique, toute suite convergente est de Cauchy. Donner ensuite un exemple d'une suite de Cauchy non convergente.

. . . .

Solution : Pour les démonstrations, voir le cours.
Dans $\mathbb{R}$, la suite $(-1)^n$ est un exemple d'une suite bornée qui n'est pas de Cauchy.
Dans l'espace métrique $X =]0, +\infty[$, la suite $\frac{1}{n}$, où $n \geq 1$, est un exemple d'une suite de Cauchy non convergente dans X.

. . . .

Exercice 3.
On considère l'équation différentielle

$$\boxed{\text{Jaune}} \quad y''(x) + y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad\qquad \boxed{\text{Bleu}} \quad y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0,$$

où a et b sont des fonctions continues dans $\mathbb{R}$, non identiquement nulles. Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. (**Pas besoin de justifier vos réponses**).

1. Cette équation possède une et une solution. . . . . V□ F□
2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire. . . . . V□ F□
3. La solution générale est un espace vectoriel de dimension 2. . . . . V□ F□
4. La solution générale est de la forme $\lambda f(x) + \mu g(x) + h(x)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et f, g, h fonctions non identiquement nulles. . . . . V□ F□

. . . .

Solution :
1. Faux : il y une infinité de solutions.
2. Vrai.
3. Faux (Jaune) puisque l'équation possède un second membre **/** Vrai (Bleu) puisque l'équation est homogène.
4. Vrai (Jaune) **/** Faux (Bleu) : la solution générale est de la forme $\lambda f(x) + \mu g(x)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

. . . .

. . . .

Exercice 4.

$$\boxed{\text{Jaune/Bleu}}$$

Soit $X = C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, normé par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. On note B_R la boule $B_R = \{f \in X : \|f\|_\infty \le R\}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $T : X \to X$ l'application qui à la fonction f associe la fonction $T(f)$, où

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad T(f)(x) = f(x)^2 + a \sin x.$$

1. Démontrer que si $|a| \le \frac{1}{4}$, alors
$$\|f\|_\infty \le \frac{1}{2} \implies \|T(f)\|_\infty \le \frac{1}{2},$$
et que T est une application 1-lipschitzienne sur la boule $B_{1/2}$.
2. Démontrer que si $|a| < \frac{1}{4}$ on peut trouver R, avec $0 \le R < \frac{1}{2}$, tel que $T : B_R \to B_R$, et tel que T est contractante sur B_R.
3. Expliquer pourquoi, si $|a| < \frac{1}{4}$, l'application possède un et un seul point fixe dans B_R.

. . . .

Solution. 1. Si $|a| \le \frac{1}{4}$ et $\|f\| \le \frac{1}{2}$, alors

$$\|T(f)\|_\infty \le \|f\|_\infty^2 + \tfrac{1}{4} \le \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \le \tfrac{1}{2}.$$

De plus

$$\|T(f) - T(g)\|_\infty = \|f^2 - g^2\|_\infty = \|f + g\|_\infty \|f - g\|_\infty \le \Big(\underbrace{\|f\|_\infty}_{\le 1/2} + \underbrace{\|g\|_\infty}_{\le 1/2}\Big)\|f - g\|_\infty \le \|f - g\|_\infty.$$

Donc T est une application 1-lipschitzienne sur la boule $B_{1/2}$.

2. Si $|a| < \frac{1}{4}$ et $\|f\|_\infty \le R$, alors
$$\|T(f)\|_\infty \le R^2 + |a| \le R,$$
la dernière inégalité étant assurée lorsque
$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-4|a|} \le R \le \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-4|a|}\,.$$
Choisissons, par exemple
$$R = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4a}.$$
On a bien $0 \le R < \frac{1}{2}$. Le même calcul qu'avant montre que T est une application $2R$-lipschitzienne sur la boule B_R. Comme $2R < 1$, T est alors contractante sur cette boule.

3. L'espace $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un epace de Banach pour la norme du sup. De plus, B_R est fermé dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc B_R est complet (en tant que partie fermée d'un espace complet). Le théorème des contractions s'applique et garantit l'existence et l'unicité, dans B_R d'un point fixe pour T.

. . . .

. . . .