Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
13 mars 2019

NOM . . . . **Prénom** . . . . N. étudiant . . . .

Analyse pour l'économie 2. Contrôle continu N. 1.

La durée de totale de l'epreuve est d'une heure. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

— Feuilles de brouillon jaunes : **traiter uniquement les questions "jaunes"**.
— Feuilles de brouillon bleus : **traiter uniquement les questions "bleus"**.

Exercice 1.

$\boxed{\text{Jaune}}$ Écrire la solution générale de l'équation différentielle $y^{(4)} - 16y = 0$. Trouver ensuite toutes les solutions vérifiant $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

$\boxed{\text{Bleu}}$ Écrire la solution générale de l'équation différentielle $y^{(4)} - 16y'' = 0$. Trouver ensuite toutes les solutions vérifiant $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Exercice 2.

$\boxed{\text{Jaune}}$ Démontrer que, dans un espace métrique, toute suite de Cauchy est bornée. Donner ensuite un exemple d'une suite bornée, non de Cauchy.

$\boxed{\text{Bleu}}$ Démontrer que, dans un espace métrique, toute suite convergente est de Cauchy. Donner ensuite un exemple d'une suite de Cauchy non convergente.

Exercice 3.
On considère l'équation différentielle

$$\boxed{\text{Jaune}} \quad y''(x) + y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad\qquad \boxed{\text{Bleu}} \quad y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0,$$

où a et b sont des fonctions continues dans $\mathbb{R}$, non identiquement nulles. Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. (**Pas besoin de justifier vos réponses**).

1. Cette équation possède une et une solution. . . . . V□ F□
2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire. . . . . V□ F□
3. La solution générale est un espace vectoriel de dimension 2. . . . . V□ F□
4. La solution générale est de la forme $\lambda f(x) + \mu g(x) + h(x)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et f, g, h fonctions non identiquement nulles. . . . . V□ F□

. . . .

. . . .

. . . .

Exercice 4.

$\boxed{\text{Jaune/Bleu}}$

Soit $X = C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, normé par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. On note B_R la boule $B_R = \{f \in X : \|f\|_\infty \le R\}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $T : X \to X$ l'application qui à la fonction f associe la fonction $T(f)$, où

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad T(f)(x) = f(x)^2 + a \sin x.$$

1. Démontrer que si $|a| \le \frac{1}{4}$, alors
$$\|f\|_\infty \le \frac{1}{2} \implies \|T(f)\|_\infty \le \frac{1}{2},$$
et que T est une application 1-lipschitzienne sur la boule $B_{1/2}$.
2. Démontrer que si $|a| < \frac{1}{4}$ on peut trouver R, avec $0 \le R < \frac{1}{2}$, tel que $T : B_R \to B_R$, et tel que T est contractante sur B_R.
3. Expliquer pourquoi, si $|a| < \frac{1}{4}$, l'application possède un et un seul point fixe dans B_R.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

NOM, Prénom . . . . N. étudiant . . . .