Université Claude Bernard Lyon 1
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
10 mars 2021

Analyse pour l'économie 2. Contrôle continu N. 1.

La durée de totale de l'epreuve est d'une heure. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1.
Écrire la solution générale de l'équation différentielle $y^{(4)} - 4y^{(2)} = 0$. Trouver ensuite toutes les solutions bornées de cette équation.

Exercice 2.
Trouver toutes les fonctions u et v de la variable t vérifiant le système différentiel

$$\begin{cases} u' = u + v + t \\ v' = -2u - v + e^{2t} \end{cases}$$

On pourra commencer par montrer que u vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et la résoudre.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère les fonctions $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ où $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$.

1. Démontrer que f_n est lipschitzienne et préciser une constante de Lipschitz.
2. Soit $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Démontrer que f n'est pas lipschitzienne.

   On considère ensuite l'espace $X \subset C([0,1], \mathbb{R})$ de toutes les fonctions lipschitziennes, muni de la distance du sup.
3. La suite (f_n) est-elle convergente dans $C([0,1], \mathbb{R})$? Est-elle de Cauchy dans X ?
4. X est-il complet ?

Exercice 1 : Le polynôme caractéristique est : $P(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 4)$ qui a pour racines $\lambda = 0$ (double) et $\lambda = \pm 2$: La solution générale est alors

$$\boxed{y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \quad (x \in \mathbb{R}).}$$

cherchons les solutions bornée dans $\mathbb{R}$: en étudiant $\lim_{x \to \pm\infty} y(x)$ on voit que les solutions bornées s'obtiennent en prenant $c_2 = c_3 = c_4 = 0$.
Les seules solutions bornées sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions constantes

EXERCICE 2

$$\begin{cases} u' = u + v + t \\ v' = -2u - v + e^{2t} \end{cases}$$

on a $u'' = u' + v' + 1 = u' - 2u - v + e^{2t} + 1 = u' - 2u - u' + u + t + e^{2t} + 1$

donc: $u'' + u = 1 + t + e^{2t}$ $(*)$ $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$ Racines : $\lambda = \pm i$

La solution générale de $(*)$ est :

$$u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + f(t)$$ où f est une solution particulière de $(*)$ à déterminer

$c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \in \mathbb{R}$

On cherche f de la forme :

$$f(t) = A + Bt + Ce^{2t}$$

on trouve : $f'(t) = B + 2Ce^{2t}$ $f''(t) = 4Ce^{2t}$

on veut : $\forall t \in \mathbb{R}$: $0 \underset{(*)}{=} f'' + f - 1 - t - e^{2t} = e^{2t}(5C - 1) + A + Bt - 1 - t$

on choisit : $A = 1$, $B = 1$, $C = 1/5$ la sol. gén. de $(*)$ est alors : $u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1 + t + \frac{1}{5}e^{2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Mais $v = u' - u - t = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + 1 + \frac{2}{5}e^{2t} - u(t) - t$

donc :

$$\boxed{\begin{cases} v(t) = -(c_1 + c_2)\sin t + (c_2 - c_1)\cos t - 2t + \frac{1}{5}e^{2t} \\ u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1 + t + \frac{1}{5}e^{2t} \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (t \in \mathbb{R})}$$

$\boxed{\text{EXERCICE 3}}$ 1) $f_n(x) = \sqrt{x + 1/n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$\forall x \in [0,1] : |f_n'(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{x+\frac{1}{n}}}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{2}$

Donc f_n est $\frac{\sqrt{n}}{2}$-lipschitzienne sur $[0,1]$

2) $\forall\, 0 < x \leq 1$: $\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Donc $\sup\limits_{0<x\leq 1} \frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|} = \sup\limits_{0<x\leq 1} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

donc f n'est pas lipschitzienne sur $[0,1]$.

3)

$\sup\limits_{0\leq x\leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} \left|\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right| \leq \sup\limits_{0\leq x\leq 1} \left|\frac{x+\frac{1}{n} - x}{\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x}}\right|$

$\leq \sup\limits_{0\leq x\leq 1} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

donc $f_n \to f$ dans $C([0,1], \mathbb{R})$.

Mais alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $C([0,1],\mathbb{R})$.
De plus, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in X$ (d'après la question 1)

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans X.

4) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans X (puisque $f_n \to f$ et $f \notin X$ d'après la question 2)

On a alors trouvé dans X une suite de Cauchy qui ne converge pas dans X. On conclut que $\boxed{X \text{ n'est pas complet}}$.