

Analyse pour l'économie 2. Contrôle continu N. 1.

La durée de totale de l'épreuve est d'une heure. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1.

Écrire la solution générale de l'équation différentielle $y^{(4)} - 4y^{(2)} = 0$. Trouver ensuite toutes les solutions bornées de cette équation.

Exercice 2.

Trouver toutes les fonctions u et v de la variable t vérifiant le système différentiel

$$\begin{cases} u' = u + v + t \\ v' = -2u - v + e^{2t} \end{cases}$$

On pourra commencer par montrer que u vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et la résoudre.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère les fonctions $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ où $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$.

1. Démontrer que f_n est lipschitzienne et préciser une constante de Lipschitz.
2. Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Démontrer que f n'est pas lipschitzienne.

On considère ensuite l'espace $X \subset C([0, 1], \mathbb{R})$ de toutes les fonctions lipschitziennes, muni de la distance du sup.

3. La suite (f_n) est-elle convergente dans $C([0, 1], \mathbb{R})$? Est-elle de Cauchy dans X ?
4. X est-il complet?