$$\begin{cases} u' = u + v + t^2 & (1) \\ v' = 2u + 2v - 2t + 2t^2 & (2) \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

1) $u'' \underset{(1)}{=} u' + v' + 2t \underset{(2)}{=} u' + 2u + 2v \cancel{-2t} + 2t^2 \cancel{+2t}$

$\underset{(1)}{=} u' \cancel{+2u} + 2u' \cancel{-2u} \cancel{-2t^2} \cancel{+2t^2} = 3u'$

Donc $u'' - 3u' = 0$ $\qquad P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3)$

2) La solution générale de $u'' - 3u' = 0$ est

$u(t) = \alpha + \beta e^{3t} \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

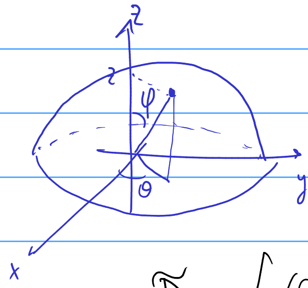
3) On a $u' = 3\beta e^{3t}.$

Donc $v \underset{(1)}{=} u' - u - t^2 = 3\beta e^{3t} - \alpha - \beta e^{3t} - t^2 = 2\beta e^{3t} - \alpha - t^2$

La solution générale du système est donc:

$$\begin{cases} u(t) = \alpha + \beta e^{3t} \\ v(t) = 2\beta e^{3t} - \alpha - t^2 \end{cases} \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\boxed{2}$ $$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\tilde{D}} \rho\cos\varphi \;\; \rho^2\sin\varphi\; d\rho\, d\theta\, d\varphi = \dots$$



$\theta =$ longitude

$\varphi =$ colatitude

$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$x = \rho\sin\varphi\cos\theta$
$y = \rho\sin\varphi\sin\theta$
$z = \rho\cos\varphi$

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \quad x^2+y^2+z^2 \le R^2, \; z \geq 0\}$$

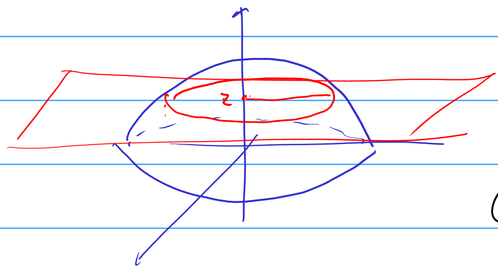
$$\tilde{D} = \{(\rho,\theta,\varphi) : \quad 0\le\rho\le R; \quad 0\le\theta\le 2\pi \; ; \quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\}$$

$z\geq 0 \Leftrightarrow 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

$$\dots = \left(\int_0^R \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right) = \frac{1}{4}R^4 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$= \frac{\pi R^4}{4}\left[-\frac{\cos(2\varphi)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^4}{8}\left(-\cos\pi + \cos 0\right) = \frac{\pi R^4}{4}$$

Autre méthode $$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \int_0^R \left(\iint_{D_z} z\,dx\,dy\right) dz$$



où $D_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad x^2+y^2 \le R^2-z^2\}$

On a $$\iint_{D_z} z\,dx\,dy = z\iint_{D_z} 1\,dx\,dy = z\cdot \text{Aire}(D_z)$$
$$= z\,\pi(R^2-z^2)$$
$$= \pi R^2 z - \pi z^3$$

Donc :
$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \pi\int_0^R (R^2 z - z^3)\,dz = \pi\left(\frac{1}{2}R^4 - \frac{1}{4}R^4\right) = \frac{\pi R^4}{4}$$

$\boxed{3}$ $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, $x \in [0,2]$.

1) $P_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} e^x$ simplement dans $[0,2]$.

Mais, sur $[0,2]$: $\left\| \frac{x^k}{k!} \right\|_\infty \leq \frac{2^k}{k!}$ et $\sum \frac{2^k}{k!}$ converge par le critère de D'Alembert.

Donc la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ est normalement convergente dans $[0,2]$, et donc aussi uniformément convergente.

Par conséquent, $P_n(x) \to e^x$ uniformément sur $[0,2]$.

2) La suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans X vers la fonction exponentielle.

3) La suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans X. Mais P_n est un polynôme, donc $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ et cette suite est donc de Cauchy dans Y. Mais elle ne peut pas converger dans Y puisqu'elle converge vers la fonction exponentielle, qui n'est pas un polynôme.

En conclusion on a trouvé dans Y une suite de Cauchy divergente. Donc Y n'est pas complet.