Université Claude Bernard Lyon 1
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
6 avril 2022

Analyse pour l'économie 2. Contrôle continu N. 1.

La durée de totale de l'epreuve est d'une heure. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé.

Les affirmations et les raisonnements grossièrement faux sont sanctionnés. Se limiter aux questions que l'on pense pouvoir traiter correctement et soigner la présentation.

Exercice 1.

On considère le système différentiel d'inconnues u et v (fonctions de la variable t) :

$$\begin{cases} u' = u + v + t^2 \\ v' = 2u + 2v - 2t + 2t^2. \end{cases}$$

1. Démontrer que u vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène.
2. Trouver toutes les solutions u de l'équation trouvée au point précédent.
3. En déduire la solution générale du système différentiel.

Exercice 2.

Calculer l'intégrale triple $\iiint_D z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$, où D est la demi boule supérieure de $\mathbb{R}^3$, de centre O et rayon $R > 0$.
On pourra utiliser, au choix, l'une des méthodes suivantes :

a) Un changement de variables en coordonnées sphériques.
b) La méthode d'intégration "par couches" (couper la demi-boule avec des plan horizontaux, ensuite calculer d'abord l'intégrale double en x, y sur un disque, après intégrer en z).

[*Vérification du résultat : la réponse dans le cas particulier* $R = 2$ *est* $\iiint_D z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = 4\pi$.]

Exercice 3.

On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. On note $X = C([0,1], \mathbb{R})$ et Y le sous-espace de X formé par les fonctions polynômiales sur l'intervalle $[0,1]$. On munit ces espaces de la distance du sup :
$d(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Quelle est la limite de la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$? La convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$?
2. La suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle dans X ? Et dans Y ?
3. Démontrer que l'espace Y n'est pas complet.