Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
12 avril 2017

Analyse pour l'économie 2. Contrôle continu N. 2. Corrigé

La durée de totale de l'epreuve est d'une heure. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. Écrire l'équation cartesienne du plan tangent au point $(1, 2, 3)$ à la surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $\varphi(u, v) = (u, uv, u + v)$, où $u, v \in \mathbb{R}$.

. . . .

Observons que $(1, 2, 3) = \varphi(1, 2)$, donc le point appartient bien à la surface. Les deux vecteurs tangents directeurs sont :

$$\varphi_u(u, v) = (1, v, 1), \quad \text{en particulier } \varphi_u(1, 2) = (1, 2, 1),$$

et

$$\varphi_v(u, v) = (0, u, 1), \quad \text{en particulier } \varphi_v(1, 2) = (0, 1, 1).$$

L'équation cartésienne du plan tangent est alors

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire,

$$x - y + z - 2 = 0.$$

Exercice 2. Calculer, à l'aide d'une intégrale triple, le volume d'une calotte sphérique de rayon R et d'hauteur h, avec $0 \le h \le R$. Retrouver, en prenant $h = R$, que le volume d'une demi-boule est $\frac{2}{3}\pi R^3$.

. . . .

Considérons la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Une calotte sphérique de rayon R et hauteur h peut être représentée par l'ensemble

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ R - h \le z \le R\}.$$

Intégrons par couches (en fixant la variable z) et utilisons ensuite les coordonnées polaires pour le calcul de l'intégrale double sur l'ensemble $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le R^2 - z^2\}$. On trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(D) &= \iiint_D 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{R-h}^{R} \Big(\iint_{D_z} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}z = \int_{R-h}^{R} \Big(\iint_{[0,\sqrt{R^2-z^2}]\times[0,2\pi]} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{R-h}^{R} \Big(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}z = 2\pi \int_{R-h}^{R} \Big(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho\,\mathrm{d}\rho\Big)\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_{R-h}^{R} \Big(\frac{1}{2}(R^2 - z^2)\Big)\,\mathrm{d}z = \pi(R^2 h - \frac{1}{3}(R^3 - (R-h)^3)) = \pi h^2 (R - \frac{h}{3}).
\end{aligned}$$

Pour $h = R$ la calotte est une demi-boule. La formule précédente $\mathrm{Vol}(D) = \pi h^2(R - \frac{h}{3})$ devient dans ce cas $\mathrm{Vol}(D) = \frac{2}{3}\pi R^3$.

Exercice 3. Trouver la courbure en tout point du graphe de la fonction $x \mapsto e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que la courbure est maximale au point $(-\ln\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

. . . .

La courbe peut être paramétrée par $\varphi(x) = (x, e^x)$. Observons que $\varphi'(x) = (1, e^x)$ et $\varphi''(x) = (0, e^x)$. La courbure $\kappa(x)$ de la courbe au point $\varphi(x)$ est donnée par la formule

$$\kappa(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix}}{\|(1, e^x)\|^3} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}}.$$

Observons que

$$\kappa'(x) = \frac{e^x(1+e^{2x})^{3/2} - 3e^x(1+e^{2x})^{1/2}e^{2x}}{(1+e^{2x})^3}.$$

Ainsi,

$$\kappa'(x) = 0 \iff e^x(1+e^{2x})^{1/2}(1-2e^{2x}) = 0 \iff e^{2x} = 1/2 \iff x = -\ln\sqrt{2}.$$

L'étude du signe de $\kappa'(x)$ montre que $\kappa(x)$ atteint en $-\ln\sqrt{2}$ un maximum global. La courbure est donc maximale au point $\varphi(-\ln\sqrt{2}) = (-\ln\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Exercice 4. L'application $x \mapsto \sin x$ est-elle une contraction sur $\mathbb{R}$? Justifier.

. . . .

Non. En effet, si par contradiction cette fonction était une contraction, il existerait $0 \leq k < 1$ telle que

$$\forall\, x, x_0 \in \mathbb{R} \colon |\sin(x) - \sin(x_0)| \leq k|x - x_0|.$$

En particulier, pour $x_0 = 0$ on trouve

$$\forall x \neq 0 \colon \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq k < 1.$$

Ceci est absurde puisque $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
Remarque : on peut montrer de la même manière que toute fonction dérivable $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $|f'(x_0)| \geq 1$ en un point x_0 n'est pas une contraction.