Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
25 avril 2018

Analyse pour l'économie 2. Contrôle continu N. 2.

Exercice 1. Soit $\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy^2e^y + 1 = 0\}$. Trouver, à l'aide du théorème des fonctions implicites, l'unique point $(x_0, y_0) \in \Sigma$ au voisinage duquel Σ *n'est pas* le graphe d'une fonction dérivable $x \mapsto y(x)$.

Solution. Posons $F(x,y) = xy^2e^y + 1$. La fonction F est de classe C^1. Si $(x_0, y_0) \in \Sigma$ et $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, par le théorème des fonctions implicites, Σ est le graphe d'une fonction dérivable $x \mapsto y(x)$ au voisinage de (x_0, y_0). Alors, il s'agit de trouver les points $(x_0, y_0) \in \Sigma$ tels que $F_y(x_0, y_0) = 0$. On a

$$F_y(x,y) = xye^y(2+y).$$

L'appartenance à Σ se traduit par l'équation $F(x,y) = 0$. Il s'agit alors de resoudre le système

$$\begin{cases} xye^y(2+y) = 0 \\ xy^2e^y + 1 = 0. \end{cases}$$

La première équation fournit $x = 0$, ou $y = 0$, ou $y = -2$. Mais seulement $y = -2$ est compatible avec la seconde équation. On trouve alors $x = -\frac{1}{4}e^2$. En conclusion, le point demandé est $(x_0, y_0) = (-\frac{1}{4}e^2, -2)$.

Exercice 2. Soit $A \geq 0$. Calculer le volume du domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par les relations $0 \leq x \leq y \leq z \leq A$.

Solution. Il s'agit de calculer

$$V = \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz,$$

où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq x \leq y \leq z \leq A\}$.
On peut fixer les variables (x,y) et intégrer d'abord par rapport à z. Les variables (x,y) varient alors dans le domaine de $\mathbb{R}^2$

$$\widetilde{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq y \leq A\}.$$

Pour $(x,y) \in \widetilde{D}$, on a $(x,y,z) \in D \iff y \leq z \leq A$. On a alors, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\widetilde{D}} \Big[\int_y^A 1 \, dz\Big] \, dx \, dy = \iint_{\widetilde{D}} (A-y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^A \Big[\int_x^A (A-y) \, dy\Big] \, dx = \int_0^A [A(A-x) - \tfrac{1}{2}(A^2 - x^2)] \, dx \\ &= A^3 - \tfrac{1}{2}A^3 - \tfrac{1}{2}A^3 + \tfrac{1}{6}A^3 = \tfrac{1}{6}A^3 \end{aligned}$$

Remarque : on pouvait aussi observer qu'il y a 6 manières différentes de permuter trois variables. Pour des raisons de symétrie, le domaine D est un sixième du volume du cube de coté A. on retrouve donc $V = \frac{1}{6}A^3$ sans faire appel aux intégrales multiples.

Exercice 3. On considère la courbe Γ paramétrée par

$$x(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad y(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \text{où } t \geq 0.$$

1. Trouver l'équation paramétrique de la droite tangente au point $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$. Quelle est la pente de cette droite ?
2. Calculer la distance entre un point générique $(x(t), y(t))$ de Γ et l'origine. Que peut-on dire de Γ ?
3. Calculer $(x(0), y(0))$, $\lim_{t\to+\infty}(x(t), y(t))$ et tracer ensuite la courbe Γ.

Solution.

1. Vérifions que le point $P = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ appartient bien à la courbe. En effet, le système

$$\begin{cases} \dfrac{2t}{1+t^2} = \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

possède une (seule) solution : $t = 1/2$. On a

$$x'(t) = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \qquad y'(t) = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}.$$

Donc $(x'(\frac{1}{2}), y'(\frac{1}{2})) = (\frac{24}{25}, -\frac{32}{25})$ et la droite tangente demandée est alors la droite paramétrée par

$$t \mapsto (\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}) + (t - \tfrac{1}{2})(\tfrac{24}{25}, -\tfrac{32}{25}), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La pente de cette droite est $m = -\frac{32/25}{24/25} = -\frac{4}{3}$. Il s'agit donc de la droite d'équation cartesienne $y - \frac{3}{5} = -\frac{4}{3}(x - \frac{4}{5})$, ou encore

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}.$$

2. La distance $d(t)$ entre le point $(x(t), y(t))$ de Γ et l'origine est

$$d(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{\frac{4t^2 + (1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = 1.$$

Le support de Γ est donc contenu dans le cercle de centre O et de rayon 1. Il s'agit d'un arc de cercle, puisque les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont continues.

3. On a $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ et $\lim_{t\to+\infty}(x(t), y(t)) = (0, -1)$. On voit alors que Γ est le demi-cercle de rayon 1 contenu dans le demi-plan $x \geq 0$, privé du point $(0, -1)$.