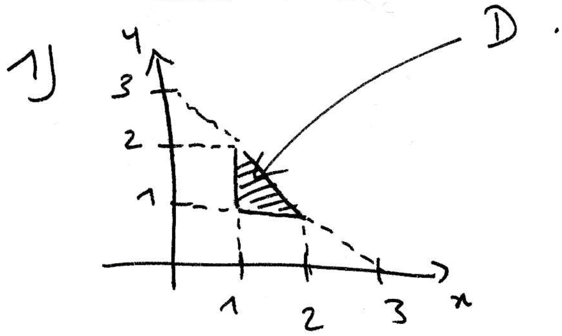
CC2 - Correction.

Exercice 1 : Équation $y'' + \alpha y = 0$.

- si $\alpha > 0$, les solutions sont de la forme
$$x \longmapsto \lambda \cos(|\alpha| x) + \mu \sin(|\alpha| x), \text{ pour } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
- si $\alpha < 0$, les solutions sont de la forme
$$x \longmapsto \lambda \,\mathrm{ch}(|\alpha| x) + \mu \,\mathrm{sh}(|\alpha| x), \text{ pour } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
- si $\alpha = 0$, les solutions sont de la forme
$$x \longmapsto \lambda x + \mu, \text{ pour } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 :

1)



$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^3} = \int_{x=1}^{2} \int_{y=1}^{3-x} \frac{dx\,dy}{(x+y)^3}.$$

$$= \int_{x=1}^{2} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(x+y)^2} \right]_{y=1}^{3-x} dx$$

$$= \int_{x=1}^{2} \left(-\frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{2(x+1)^2} \right) dx = -\frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x+1} \right]_{x=1}^{2}$$

$$= -\frac{1}{2\cdot 3^2} + -\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4} = -\frac{2}{2^2\cdot 3^2} + \frac{-6}{2^2\cdot 3^2} + \frac{3^2}{2^2\cdot 3^2} = \frac{1}{36}$$

2) changement de variable en coordonnées polaires :

$(x,y) \rightsquigarrow (\rho, \theta)$ avec $\rho \geq 0$, $\theta \in [0; 2\pi[$, $dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\theta$

$$\iint_{D \text{ disque unité}} (x+y)^2\, dx\, dy = \int_{\rho=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho^2 (\cos\theta + \sin\theta)^2 \rho \, d\rho\, d\theta = \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{1} \times \int_{\theta=0}^{2\pi} (1 + 2\sin\theta\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \times \left(2\pi + \left[\sin^2\theta \right]_{\theta=0}^{2\pi} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3 :

1) $\gamma(t) = (3\cos t - \cos 3t\ ,\ 3\sin t - \sin 3t) = (x(t), y(t))$

. $t \mapsto x(t) = 3\cos t - \cos 3t$ est paire

. $t \mapsto y(t) = 3\sin t - \sin 3t$ est impaire.

donc $\gamma(-t) = (x(t), -y(t))$ et la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

. $x(\pi - t) = 3\cos(\pi - t) - \cos(3\pi - 3t)$
$= -3\cos t - \cos(\pi - 3t) = -3\cos t + \cos(3t) = -x(t)$

. $y(\pi - t) = 3\sin(\pi - t) - \sin(3\pi - 3t)$
$= 3\sin(t) - \sin(3t) = y(t)$.

donc $\gamma(\pi - t) = (-x(t), y(t))$
donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

. γ est 2π-périodique $\rightsquigarrow$ on peut restreindre l'étude à ~~$[0;2\pi]$~~ $[-\pi;\pi]$.

. $\gamma(-t)$ se déduit de $\gamma(t)$ $\rightsquigarrow$ on peut restreindre l'étude à $[0;\pi]$.

. $\gamma(\pi - t)$ se déduit de $\gamma(t)$ $\rightsquigarrow$ on peut restreindre l'étude à $[0;\frac{\pi}{2}]$.

. $\gamma(0) = (2, 0)$. $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 4)$

2) $\gamma'(t) = (-3\sin t + 3\sin 3t,\ 3\cos t - 3\cos 3t)$

$\gamma'(t) = 0 \iff \begin{cases} \sin t = \sin 3t \\ \cos t = \cos 3t \end{cases} \iff e^{i3t} = e^{it}$

(avec $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$)

$\iff e^{i2t} = 1.$

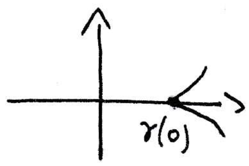
$\iff t \equiv 0 [\pi]$

$\hookrightarrow$ $t = 0$ est la seule possibilité.

$\gamma''(t) = (-3\cos t + 9\cos 3t,\ -3\sin t + 9\sin 3t).$

$\gamma''(0) = (6, 0)$

$\gamma''(\frac{\pi}{2}) = (0, -12)$



dessin qualitatif :