

Contrôle n. 2 – Une heure – A distance

ANALYSE POUR L'ÉCONOMIE

7 avril 2021

Le barème attachera une importance particulière à la qualité de la rédaction : une bonne réponse non justifiée ne sera pas comptée. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 (Équations différentielles – 8 pts.). Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y = 0$
2. $y'' + y' - 2y = 1$
3. $y'' - 2y' + y = 0$
4. $y' + y = \cos^2(t)$.

Exercice 2 (Intégrales multiples – 6 pts.). Dans le plan \mathbb{R}^2 , on note B la boule de centre $(1, -1)$ et de rayon 10. On souhaite évaluer l'intégrale

$$I = \iint_B (x^2 + y^2 - 2x + 2y) dx dy.$$

1. En utilisant le changement de variables $u = x - 1$ et $v = y + 1$, montrer que I peut s'écrire comme une intégrale sur la boule B' de centre $(0, 0)$ et de rayon 10. (2 pts.)
2. En utilisant un autre changement de variables, calculer la valeur de I . (4pts.)

Note : on cherchera à bien détailler les étapes en effectuant les changements de variables.

Exercice 3 (Courbes paramétrées – 8 pts.). On considère la courbe plane définie par

$$(1) \quad \begin{cases} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases} \quad \text{pour } t \in [0, 1].$$

1. On pose, pour $t \in [0, 1]$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Tracer la tangente à la courbe en $\gamma(0)$ et en donner une équation cartésienne. (1pt)
2. La paramétrisation (1) est-elle régulière? (2pts.)
3. Déterminer la tangente à la courbe en $\gamma(1)$ et la tracer. (*Indication : $\pi^2/8 \approx 1.23$*) (4pts.)
4. Ecrire, sous la forme d'une intégrale, la longueur de cette courbe. (1pt.) (*On ne cherchera pas à calculer la valeur de cette intégrale*)