

## Contrôle continu N. 2.

L2 mathématiques et économie. Analyse pour l'économie 2.

### Exercice 1 : (10 points)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

1.  $y' + \sin(x)y(x) = xe^{x^2+\cos(x)}$ ,
2.  $y'' + 8y' - 15y = x$ ,
3.  $y'' - 4y' + 4y = x^2$ ,
4.  $y'' + y' + y = e^x$ ,
5.  $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$ .

### Exercice 2 : (10 points)

Calculer les intégrales multiples suivantes :

1.  $\iint_D (x + 2y)^2 dx dy$   
où  $D$  est le rectangle délimité par les droites d'équations  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 1$  et  $y = 2$ .
2.  $\iint_D \cos\left(\frac{\pi}{2}(x + y)\right) dx dy$   
où  $D$  est le triangle délimité par les points  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$  et  $C = (0, 1)$ .
3.  $\iint_D e^{3x-y} dx dy$   
où  $D$  est le trapèze délimité par les points  $A = (-2, 0)$ ,  $B = (2, 0)$ ,  $C = (1, 1)$  et  $D = (-1, 1)$ .
4.  $\iint_D (x^2 + y^2)^3 dx dy$   
où  $D$  est le disque de centre l'origine  $O$  et de rayon 2.
5.  $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}} dx dy$   
où  $D$  est la couronne délimitée par les cercles de centres l'origine  $O$  et de rayons  $a$  et  $b$  avec  $0 < a < b$ .

### Exercice optionnel : (10 points)

Dans cette question, on ne considère que des rectangles du plan  $\mathbb{R}^2$  dont les cotés sont parallèles aux axes des abscisses et des ordonnées.

- 1) Soient  $a, b, c$  et  $d$  quatre réels, et  $R$  le rectangle délimité par les droites d'équations  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = c$  et  $y = d$ . Calculer l'intégrale  $\iint_R e^{2i\pi(x+y)} dx dy$ .
- 2) On dit qu'un rectangle est semi-entier si la longueur d'au moins un de ses cotés est un nombre entier. Montrer qu'un rectangle est semi-entier si et seulement si l'intégrale  $\iint_R e^{2i\pi(x+y)} dx dy$  est nulle.
- 3) Soit  $R$  un rectangle. On suppose que l'on peut découper  $R$  en rectangles semi-entiers. Montrer que  $R$  est semi-entier.

\*\*\*\*\*