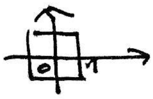
CC3 - correction

Exercice 1 :

1) D est le carré 

$$\iint_D (x+y)^2\,dx\,dy = \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1}(x+y)^2\,dx\,dy.$$

$$= \int_{x=1}^{1}\left[\frac{1}{3}(x+y)^3\right]_{y=-1}^{1} dx = \int_{x=-1}^{1}\left(\frac{(x+1)^3}{3} - \frac{(x-1)^3}{3}\right)dx$$

$$= \left[\frac{(x+1)^4}{4\times 3}\right]_{x=-1}^{x=1} - \left[\frac{(x-1)^4}{4\times 3}\right]_{x=-1}^{x=1}$$

$$= \frac{2^4}{4\cdot 3} - 0 - 0 + \frac{(-2)^4}{4\times 3} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

2) D : disque de rayon 2, de centre O :

$$\iint_D (x+y)^2\,dx\,dy = \int_{\rho=0}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\rho^2(\cos\theta+\sin\theta)^2\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\rho=0}^{2} \times \int_{\theta=0}^{2\pi}(1+2\cos\theta\sin\theta)\,d\theta$$

or, $\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi} 2\cos\theta\sin\theta\,d\theta = \left[\sin^2\theta\right]_{\theta=0}^{2\pi} = 0.$

ou encore : $\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi} 2\cos\theta\sin\theta\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\sin(2\theta)\,d\theta = \left[-\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right]_{\theta=0}^{2\pi} = 0.$

$$\iint_D (x+y)^2\,dx\,dy = \frac{2^4}{4}\cdot\int_{\theta=0}^{2\pi}(1+2\cos\theta\sin\theta)\,d\theta = 4\cdot 2\pi = 8\pi$$

Exercice 2 :

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / e^x + e^y + e^z = 1\}$$

et $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x + 2y + 3z$.

1) $e^{-\ln(3)} + e^{-\ln(3)} + e^{-\ln(3)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$

donc $(-\ln(3), -\ln(3), -\ln(3)) \in S$

et $f(-\ln(3), -\ln(3), -\ln(3)) = -(\ln(3) + 2\ln(3) + 3\ln(3))$
$= -6\ln(3)$.

2) $S' = \{(x,y,z) \in S \,/\, f(x,y,z) \geq -6\ln 3\}$.

Soit $g : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto e^x + e^y + e^z$.

$S' = g^{-1}(\{1\}) \cap f^{-1}([-6\ln(3), +\infty[)$.
est fermé puisqu'est une intersection de fermés, étant donné que f et g sont continues.

Pour montrer que S' est compact, il s'agit maintenant de montrer qu'il est fermé.

Si $(x,y,z) \in S'$, alors $e^x + e^y + e^z = 1$, et donc $e^x \leq 1$, $e^y \leq 1$ et $e^z \leq 1$, et donc $x \leq 0$, $y \leq 0$ et $z \leq 0$.

et donc, puisque $(x,y,z) \in S'$,

$-6\ln(3) \leq f(x,y,z) = x + 2y + 3z \leq x \leq 0$.

$-6\ln(3) \leq f(x,y,z) = x + 2y + 3z \leq 2y \leq 0$.

$-6\ln(3) \leq f(x,y,z) = x + 2y + 3z \leq 3z \leq 0$.

et donc : $x \in [-6\ln 3, 0]$, $y \in [-3\ln 3, 0]$
et $y \in [-2\ln(3), 0]$. Ainsi $(x,y,z) \in S' \Rightarrow (x,y,z) \in [-6\ln 3, 0]^3$

donc S' est borné, et S' est compacte.

c) puisque $(-\ln(3), -\ln(3), -\ln(3)) \in S$,

$$\sup_{(x,y,z)\in S} f(x,y,z) \geq f(-\ln(3), -\ln(3), -\ln(3)) = -6\ln 3$$

puisque f est continue, $\displaystyle\sup_{(x,y,z)\in S} f(x,y,z) = \sup_{(x,y,z)\in S'} f(x,y,z)$

et comme S' est compacte, f atteind sur S' son maximum, et ce maximum est le maximum de f sur S.

pour le déterminer, on utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Soit λ tel que

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \quad \text{avec } (x,y,z) \in S'$$

alors $(1, 2, 3) = \lambda(e^x, e^y, e^z)$

et $\lambda = \lambda(e^x + e^y + e^z) = 1 + 2 + 3 = 6$.

on en déduit : • $e^x = \frac{1}{6}$ donc $x = -\ln(6)$.

• $e^y = \frac{1}{3}$ donc $y = -\ln(3)$

• $e^z = +\frac{1}{2}$ donc $z = -\ln(2)$.

le maximum de f sur S est donc atteint au point $(-\ln(6), -\ln(3), -\ln(2))$, et il vaut

$$f(-\ln(6), -\ln(3), -\ln(2)) = -\ln(6\cdot 3^2\cdot 2^3)$$
$$= -\ln(432).$$

Exercice 3 :

C définie dans $\mathbb{R}^2$ par $x^3+y^3-3xy=0$.

1) Soit $f : (x,y)\in\mathbb{R}^2 \longmapsto x^3+y^3-3xy$.

d'après le théorème des fonctions implicites, cette équation définie $y=\varphi(x)$ comme fonction implicite de x au voisinage du point (a,b) si $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0 \iff a\neq b^2$.

$$= 3b^2-3a$$

• si $a=b^2$ et $(a,b)\in C$, $a^3+b^3-3ab=0$

donc $b^6+b^3-3b^3=0$ donc $b^6-2b^3=0$.

$\iff b=0$ ou $b^3=2$.

les points de C pour lesquels le théo. des fonctions implicites ne s'applique pas sont les points $(0,0)$ et $(2^{\frac{2}{3}},2^{\frac{1}{3}})$

2) on a : $f(x,\varphi(x))=0$ donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+\varphi'(a)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

et $$\varphi'(a)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}=-\frac{a^2-b}{b^2-a}=\frac{b-a^2}{b^2-a}$$

la droite tangente admet donc pour équation :

$$y=b+\varphi'(a)(x-a)=b+\frac{b-a^2}{b^2-a}(x-a).$$

3) Soit $t\in\mathbb{R}$. $\begin{cases} x^3+y^3-3xy=0 \\ y=tx \end{cases} \iff \begin{cases} x^3+t^3x^3-3tx^2=0 \\ y=tx. \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x^2\cdot(x(1+t^3)-3t)=0 \\ y=tx \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2\cdot\left(x(1+t^3)-3t\right)=0 \\ y=tx \end{cases}$$

- si $x=0$, alors $y=0$.
- si $x\neq 0$, alors $x(1+t^3)-3t=0$.
  - si $t=-1$, alors $y=-x$, et $x^3+y^3-3xy=0$
    $= +3x^2=0$.
    donc on est dans le cas $(x,y)=(0,0)$.
- si $t\neq -1$, alors $x=\dfrac{3t}{1+t^3}$ et $y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

4) $\gamma(0)=(0,0)$, $\gamma(t)\xrightarrow[t\to\pm\infty]{}(0,0)$

soit $x(t)=\dfrac{3t}{1+t^3}$, $y(t)=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$

On fait le tableau de variation de x et y. On trouve :

t	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$x(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$(\sqrt[3]{2})^2$	$\searrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$(\sqrt[3]{2})^2$	$\searrow$	0

de plus, $\gamma\left(\frac{1}{t}\right)=\left(y(t),x(t)\right)$ donc γ est une courbe symétrique par rapport à la droite $y=x$.

de plus, $t^3+1=(t+1)(t^2-t+1)$

et donc $x(t)+y(t)=\dfrac{3t(t+1)}{(t^2-t+1)(t+1)}\xrightarrow[t\to -1]{}-1$

et la droite d'équation $x+y+1=0$ est asymptote à la courbe.

On obtient :

$\sqrt[3]{2} \approx 1,25$.