

**Contrôle continu N. 3. - Durée 60 minutes**

L2 mathématiques et économie. Analyse pour l'économie 2.

*Les calculatrices sont interdites.*

**Exercice 1 :**

Calculer  $\iint_D (x+y)^2 dx dy$  lorsque :

1.  $D$  est le carré de sommets  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(-1, -1)$  et  $(-1, 1)$ .
2.  $D$  est le disque de centre l'origine, et de rayon 2.

**Exercice 2 :**

Soit  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid e^x + e^y + e^z = 1\}$  et  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ .

- a) Montrer que le point  $(-\ln(3), -\ln(3), -\ln(3))$  appartient à  $S$  et calculer  $f(-\ln(3), -\ln(3), -\ln(3))$ .
- b) Montrer que l'ensemble  $S' = \{(x, y, z) \in S \mid f(x, y, z) \geq -6 \ln(3)\}$  est compact.
- c) Montrer que  $f$  atteint sur  $S$  son maximum et le déterminer.

**Exercice 3 :**

On considère la courbe  $C$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$  définie par l'équation :

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

et soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  un point de  $C$ .

- 1) A quelle condition, portant sur  $a$  et  $b$ , cette équation définit-elle  $y = \varphi(x)$  comme une fonction implicite de  $x$  au voisinage de  $(a, b)$  ?
- 2) Calculer  $\varphi'(a)$  dans ce cas, et donner l'équation de la droite tangente à la courbe en  $(a, b)$ .
- 3) Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Résoudre le système d'équation

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ y = tx \end{cases} .$$

- 4) Dessiner la courbe donnée par le paramétrage  $\gamma(t) = \left( \frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$ , avec  $t \in \mathbb{R}$ .

\*\*\*\*\*