CORRIGÉ

Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
15 mars 2017

NOM .... **Prénom** ....

Analyse pour l'économie 2. Contrôle continu N. 1.

La durée de totale de l'epreuve est d'une heure. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. Trouver la solution générale sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$y' + \frac{t+2}{t} y = \frac{e^t}{t^2}.$$

La solution générale de l'équation homogène $y' + \frac{t+2}{t} y = 0$ est $y(t) = \lambda e^{-A(t)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où $A(t) = \int \frac{t+2}{t} dt = t + 2\ln t$

et donc $y(t) = \lambda e^{-t} e^{-2\ln t} = \lambda \frac{e^{-t}}{t^2}$.

On cherche une solution particulière de l'équation non homogène de la forme $y(t) = \lambda(t) \frac{e^{-t}}{t^2}$.

Par la méthode de variation des constantes, on sait que

$\lambda'(t) = \frac{e^t}{t^2} \cdot \frac{t^2}{e^{-t}} = e^{2t}$. Donc $\lambda(t) = \frac{e^{2t}}{2}$

En conclusion, la solution générale de l'éq. différentielle est

$$\boxed{y(t) = \lambda \frac{e^{-t}}{t^2} + \frac{e^{2t}}{2} \frac{e^{-t}}{t^2} = \lambda \frac{e^{-t}}{t^2} + \frac{e^t}{2t^2}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Exercice 2. Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' + y' + y = 2.$$

Le polinôme caractéristique associé est x^2+x+1

qui admet pour racines $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

La solution générale de l'équation homogène est alors

$$y(t) = \lambda e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Ensuite on voit que 2 est une solution particulière de l'équation, donc la solution générale est:

$$\boxed{y(t) = \lambda e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 2} \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}$ de la distance $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$, où $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction telle que $f(x) = \arctan(x)$.

1. Dans l'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$, la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ? Est-elle de Cauchy ?
2. Mêmes questions pour la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. L'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$ est-il complet ?

1) $d(\frac{1}{n}, 0) = |\arctan\frac{1}{n} - \arctan 0| = \arctan\frac{1}{n} \to 0$

Donc $\frac{1}{n} \xrightarrow[d]{} 0$. La suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors convergente dans $(\mathbb{R},d)$ et donc de Cauchy dans ce même espace.

2) Si, par l'absurde, $\exists\, l \in \mathbb{R}$ telle que $d(n,l) \to 0$

on aurait $d(n,l) \to 0$, c'àd $|\arctan n - \arctan l| \to 0$

mais $\arctan n \to \frac{\pi}{2}$ et donc $\frac{\pi}{2} - \arctan l = 0$

Absurde, car $\arctan l \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors divergente dans $(\mathbb{R},d)$.

Cependant, $d(n,m) = |\underbrace{\arctan n}_{\to\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arctan m}_{\to\frac{\pi}{2}}| \to 0$ si $(n,m)\to\infty$

donc la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R},d)$.

3) Nous avons trouvé (dans la question 2) une suite de Cauchy non convergente dans $(\mathbb{R},d)$.

Cet espace n'est donc pas complet.