$\boxed{20}$ Soit le pb. de Cauchy :

(P) $\begin{cases} y' = |y| + |t| \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $\quad t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

1) Mq (P) possède une et une seule solution <u>globale</u> définie sur $\mathbb{R}$

2) Construire explicitement cette solution dans le cas $t_0 = 0$ et $y_0 = 1$.

---

1) Vérifions que les hyp. de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites :

$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ où $f(t,y) = |y| + |t|$

- On a f continue dans $\mathbb{R}^2$.
- Vérifions que : $|f(t,y) - f(t,\tilde{y})| \leq L\,|y - \tilde{y}|$

avec L à déterminer

On a : $|f(t,y) - f(t,\tilde{y})| = \big||y| - |\tilde{y}|\big| \leq |y - \tilde{y}|$

$L = 1$ convient.

le théo de Cauchy-Lipschitz garantit l'existence et l'unicité d'une solution locale (= définie au moins sur un intervalle centré en t_0)

Pour garantir que la solution est définie sur $\mathbb{R}$ on doit vérifier que

Si K est un intervalle compact de $\mathbb{R}$ alors $\exists\, A, B \geq 0$ telles que

$\forall t \in K$ on a, $|f(t,y)| \leq A + B|y|$.

en effet si $t \in K$ on a :

$$|f(t,y)| = |t| + |y| \leq A + |y|$$

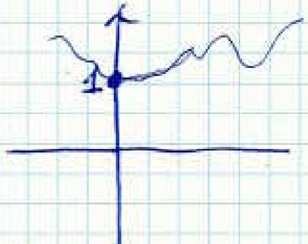
où $\boxed{A = \sup_{t \in K} |t|}$ $\quad B = 1$ convient.

Conclusion :

$\exists$ une et une seule solution de (P) et cette solution se prolonge à une solution globale (= définie sur $\mathbb{R}$).

$\boxed{20.2}$ trouver la solution de

$$(P)\begin{cases} y' = |y| + |t| \\ y(0) = 1 \end{cases}$$



On commence par étudier le pb:

$$\begin{cases} y' = y + t, & t > 0 \\ y(0) = 1 \\ y > 0 \end{cases}$$

la solution générale de $\boxed{y' = y + t}$ est:

$$y(t) = Ce^{t} + \text{sol particulière}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

sol particulière $= C(t)e^{t}$, avec

$$C(t) = \int e^{-t} \cdot t \, dt = (-e^{-t})t + \int e^{-t} dt$$

donc $C(t) = -e^{-t}t - e^{-t} = e^{-t}(-t-1)$.

Donc $\boxed{y(t) = Ce^{t} - t - 1,}$ $(C \in \mathbb{R})$.

On veut $y(0) = 1$: $1 = y(0) = C - 1 \Rightarrow C = 2$

$$\begin{cases} y(t) = 2e^{t} - t - 1, & t > 0 \\ y(t) > 0 \text{ VRAI} : & 2e^{t} > t+1 \quad \forall t > 0. \end{cases}$$

Conclusion: la solution de (P) est telle que

$$y(t) = \begin{cases} 2e^{t} - t - 1 & \forall t > 0 \\ \dots ? & t \leq 0. \end{cases}$$

Étudions à présent:

$$(P') \begin{cases} y' = y - t, & t < 0 \\ y(0) = 1 \\ y > 0 \end{cases}$$

la solution générale de $y' = y - t$ est:

$$y(t) = Ce^{t} + \text{sol. partic.}$$

et sol. partic $= C(t) \cdot e^{t}$, où $C(t) = -\int e^{-t} t \, dt$.

Donc $C(t) = e^{-t}t - \int e^{-t} dt = e^{-t}t + e^{-t} = e^{-t}(t+1)$

On trouve : $\boxed{y(t) = Ce^{t} + t + 1}$, $C \in \mathbb{R}$.

On veut $1 = y(0) = C + 1$. Donc $C = 0$.

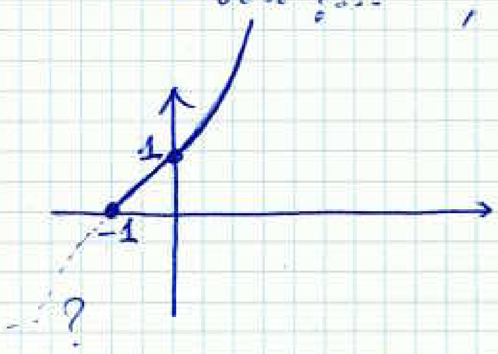
Donc la solution de (P') est $\boxed{y(t) = t + 1}$

Mais on veut $y(t) > 0$ et $t < 0$

Cela nous conduit à considérer $y(t) = t + 1$ seulement sur l'intervalle $]-1, 0[$.

Conclusion : la solution de (P) est :

$$y(t)=\begin{cases} 2e^t-t-1, & t\geq 0\\ t+1, & -1\leq t\leq 0\\ \ldots ?\ldots, & t<-1\end{cases}$$



Pour prolonger la solution sur $]-\infty,-1]$

On étudie le pb. de Cauchy :

$$(P'')\begin{cases} y'=-y-t, & t\leq -1\\ y(-1)=0\\ \boxed{y<0}\end{cases}$$

La sol. générale de $y'=-y-t$ est :

$$y(t)=Ce^{-t}+\text{sol. part.}, \quad C\in\mathbb{R}.$$

et sol. part. $=C(t)e^{-t}$ avec

$$C(t)=-\int e^t t\,dt=-e^t t+\int e^t dt=-e^t t+e^t$$

$$C(t)=e^t(-t+1)$$

Donc $y(t)=Ce^{-t}-t+1$, $C\in\mathbb{R}$.

On impose $0=y(-1)=Ce+2$

donc $C=-2/e$.

donc $y(t)=-\frac{2}{e}e^{-t}-t+1$, $t\leq -1$.

Rq : on a bien $y(t)\leq 0$ $\forall t\leq -1$.

car $-\frac{2}{e}e^{-t}\leq t-1$ $\forall t\leq -1$

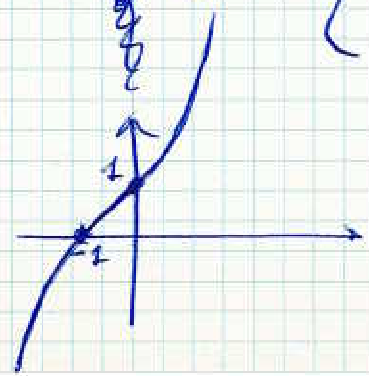
en effet si $v=-t$: on a :

$$-\frac{2}{e}e^{v}\leq -v-1.$$

en effet : $\frac{2}{e}e^v\geq v+1$ $\forall v\geq 1$. OK.

Conclusion : la solution de (P) cherchée est :

$$y(t)=\begin{cases} 2e^t-t-1, & t>0\\ t+1, & -1\leq t\leq 0\\ -\frac{2}{e}e^{-t}-t+1, & t\leq -1\end{cases}$$



25

$$\begin{cases} u' + u - v = e^t & (1) \\ v' - 4u + v = t+3 & (2) \end{cases}$$

Mq u vérifie une éq. diff. linéaire d'ordre 2. La résoudre

On dérive (1) :

$$u'' + u' - v' = e^t$$

On remplace (2) :

$$u'' + u' - 4u + v - t - 3 = e^t.$$

On réutilise (1) pour éliminer v :

$$u'' + u' - 4u + u' + u - e^t - t - 3 = e^t$$

$$\boxed{u'' + 2u' - 3u = 2e^t + t + 3} \quad (*)$$

Pol. caractéristique :

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 \qquad \lambda_1\lambda_2 = -3$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2$$

$$\lambda_1 = -3$$
$$\lambda_2 = 1$$

la solution générale de $(*)$ est :

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t + f(t)}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

où f est une solution particulière de $(*)$

On cherche f de la forme :

$$f(t) = At + B + Cte^t$$

(puisque e^t est sol. de la partie homogène de l'équation)

$$f'(t) = A + e^t(C + Ct)$$

$$f''(t) = e^t(2C + Ct)$$

Mais f est solution de $(*)$, donc :

$$0 = f'' + 2f' - 3f - 2e^t - t - 3$$

$$0 = e^t\left(\underset{-2}{2C} + \cancel{Ct} + 2C + \cancel{2Ct} - \cancel{3Ct}\right) + 2A - 3At - 3B - t - 3$$

Donc : $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$e^t(4C - 2) + t(-3A - 1) + 2A - 3B - 3 = 0$$

On trouve : $\boxed{C = \frac{1}{2}}$; $\boxed{A = -\frac{1}{3}}$; $-\frac{2}{3} - 3B - 3 = 0$

$$\boxed{B = -\frac{11}{9}}$$

$$f(t) = -\frac{1}{3}t - \frac{11}{9} + \frac{1}{2}te^t.$$

On trouve alors, d'après (1)

$$v = u' + u - e^t.$$

~~Donc~~ ~~Alors~~ Mais $u'(t)$ est donné par.

$$u'(t) = -3c_1 e^{-3t} + c_2 e^t - \frac{1}{3} + e^t\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t\right).$$

v est alors donné par:

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) = {} & -3c_1 e^{-3t} + c_2 e^t - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(1+t)e^t + \\ & + c_1 e^{-3t} + c_2 e^t - \frac{1}{3}t - \frac{11}{9} + \frac{1}{2}te^t \\ & - e^t. \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} v(t) = {} & -2c_1 e^{-3t} + (2c_2 - 1)e^t \\ & + \frac{1}{2}(1+t)e^t - \frac{1}{3}t - \frac{14}{9} \\ & + \frac{1}{2}te^t \end{aligned}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

exercice 26

(a) Soit l'éq. diff. de Bernoulli:

(B) $\boxed{y' + a(x)y + b(x)y^n = 0}$ $n \neq \{1\}$, $n \in \mathbb{Z}$

Mq le changement d'inconnue

$y(x) = z(x)^\alpha$ ~~$z(x) = y(x)^\alpha$~~ (α à déterminer)

permet de ramener l'équation (B) à une éq. linéaire en z.

$y(x) = z(x)^\alpha$. où $\boxed{z(x) > 0}$

On cherche les solutions $y(x) > 0$

$y'(x) = \alpha z(x)^{\alpha-1} \cdot z'(x)$.

d'après (B): $\alpha z(x)^{\alpha-1} z'(x) + a(x) z(x)^\alpha + b(x) z(x)^{n\alpha} = 0$

On divise par $\alpha z(x)^{\alpha-1}$.

On trouve: $z'(x) + \frac{a(x)}{\alpha} z(x) + \frac{b(x)}{\alpha} z(x)^{\boxed{n\alpha - \alpha + 1}} = 0$

On choisit α tel que: $n\alpha - \alpha + 1 = 0$

$(n-1)\alpha + 1 = 0$ $\boxed{\alpha = \frac{1}{1-n}} \neq 0$

Donc: $\boxed{z' + a(x)(1-n)z + b(x)(1-n) = 0}$