exercice 30

Soit $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continues tq.

$\forall t \geq 0 : \quad f(t) \leq \int_0^t f(s) g(s) \, ds.$

Que dire sur f ?

Rappel (Granwall)

Soit u continue sur $[0,T]$

soit $a \geq 0$ et continue sur $[0,T]$

tels que $\forall t \in [0,T] : \boxed{u(t) \leq C + \int_0^t a(s) u(s) ds}$

avec $C \in \mathbb{R}$:

Alors : $\forall t \in [0,T] : \boxed{u(t) \leq C \cdot e^{\int_0^t a(s) ds}}$

On applique Granwall avec $u = f$

et avec $a = g \geq 0$ et $C = 0$

Conclusion : $f(t) \leq 0$

Mais $f \geq 0$ par l'hypothèse

Donc $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

---

exercice 31 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue tq. $\exists c \geq 0$

tq. $\forall t \geq 0$ on a :

$$\boxed{t f(t) \leq c + \int_0^t f(s) ds} \qquad (H)$$

1) Mq f est bornée

2) ...

Indication Soit $F(t) = c + \int_0^t f(s) ds$ et M.q.

$t \mapsto \frac{F(t)}{t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

il suffit de M.q. $\left(\frac{F(t)}{t}\right)' \leq 0 \quad \forall t > 0$.

$$\left(\frac{F(t)}{t}\right)' = \frac{f(t)t - c - \int_0^t f(s) ds}{t^2} \underset{\text{Hyp. sur } f}{\leq} 0 \qquad \forall t > 0 :$$

Donc $t \mapsto \frac{F(t)}{t}$ est bien décroissante

$\forall t \geq 1$: $F(1) \geq \frac{F(t)}{t} = \frac{c + \int_0^t f(s) ds}{t} \underset{(H)}{\geq} f(t)$

Donc $0 \leq f(t) \leq F(1)$ sur $[1, +\infty[$

Mais f est continue et donc elle est bornée sur $[0,1]$

Donc f bornée sur $\mathbb{R}^+$.

$\boxed{31.2}$ Montrer que toute solution $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe C^2 de l'éq. différentielle

$$\boxed{y'' + ty = 0} \qquad (*)$$

est bornée sur $\mathbb{R}^+$

[Indic : multiplier $(*)$ par $2y'$ et intégrer sur l'intervalle $[0, t]$.
et appliquer (31.1) à y^2.

$$2y'y'' + 2tyy' = 0$$

$$\int_0^t 2y'(s)y''(s)\,ds + \int_0^t \underline{2sy(s)y(s)} = 0.$$

$$(y')^2(t) - (y')^2(0) + y(t)^2 t - \int_0^t y(s)^2\,ds = 0$$

$$\underbrace{(y')^2(t)}_{\geq 0} + y(t)^2 t - \int_0^t y(s)^2\,ds = c$$

où $c = (y')^2(0)$.

Donc $\boxed{y(t)^2 t \leq c + \int_0^t y(s)^2\,ds}$

donc y^2 vérifie (H). Donc y^2 est bornée d'après $\boxed{31.1}$. Mais alors $\underline{y \text{ est bornée}}$.

y^2 bornée c.à.d :

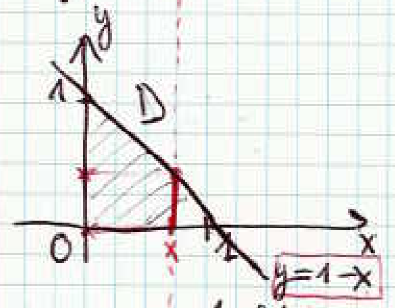
$\exists M > 0 :$ $\quad 0 \leq y(t)^2 \leq M \quad \forall t \geq 0$

Donc $\quad -\sqrt{M} \leq y(t) \leq \sqrt{M}$

(32) $f(x,y) = \ln(1+x+y)$

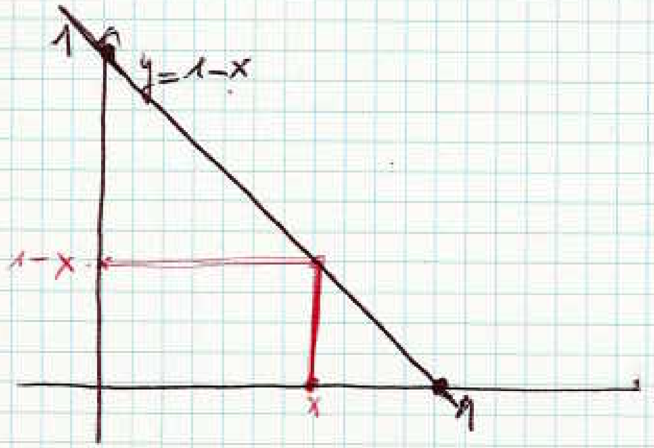
D = triangle de sommets O, $(1,0)$ et $(0,1)$

Calculer $\iint_D f(x,y)\,dxdy = I$



$$I = \iint_D \ln(1+x+y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \ln(1+x+y)\,dy \right) dx$$

On calcule d'abord : $\int_0^{1-x} \ln(1+x+y)\,dy$



On a $\int_0^{1-x} \ln(1+x+y)\,dy \underset{\uparrow}{=} \Big[(1+x+y)\ln(1+x+y) - 1 - x - y \Big]_{y=0}^{y=1-x}$

$\int \ln t = t\ln t - t$

$$= (1+\cancel{x}+1-\cancel{x})\ln(1+\cancel{x}+1-\cancel{x}) - 1 - \cancel{x} - 1 + \cancel{x} - (1+x)\ln(1+x) + 1 + x$$

Donc $\int_0^{1-x} \ln(1+x+y)\,dy = 2\ln 2 - 2 - (1+x)\ln(1+x) + 1 + x.$

Donc

$$I = \int_0^1 \Big(2\ln 2 - 2 - (1+x)\ln(1+x) + (1+x)\Big)\,dx$$

$$= 2\ln 2 - 1 + \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 (1+x)\ln(1+x)\,dx.$$

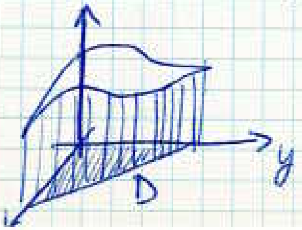
$$= 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{2} - \int_1^2 u \ln u\,du$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = 1+x \\ du = dx \\ x=0 \Leftrightarrow u=1 \\ x=1 \Leftrightarrow u=2 \end{array}}$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}u^2 \ln u\right]_{u=1}^{u=2} + \int_1^2 \frac{1}{2} u\,du$$

$$= \cancel{2\ln 2} - \frac{1}{2} - \cancel{2\ln 2} + \frac{1}{4}\Big[u^2\Big]_{u=1}^{u=2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(4-1) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

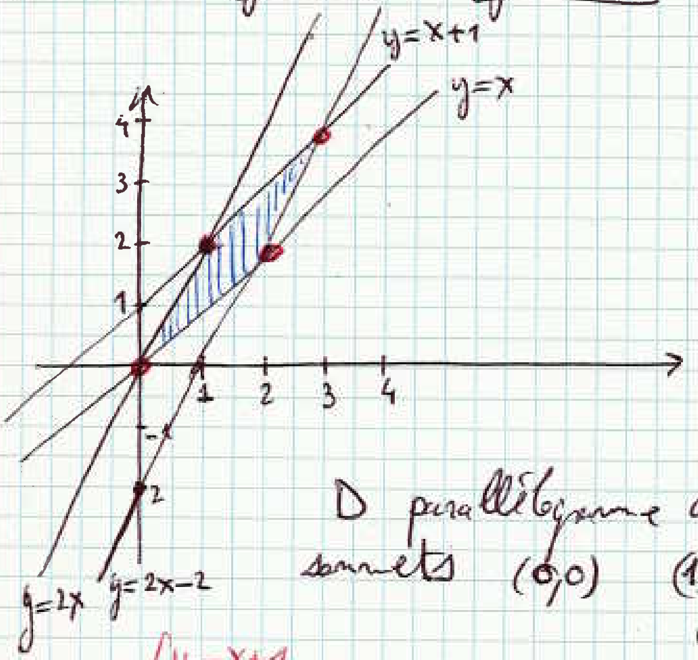


32.2

Calculer $I = \iint_D (2x-y)^2\,dx\,dy$

où D = le parallélogramme limité par les droites d'équation :

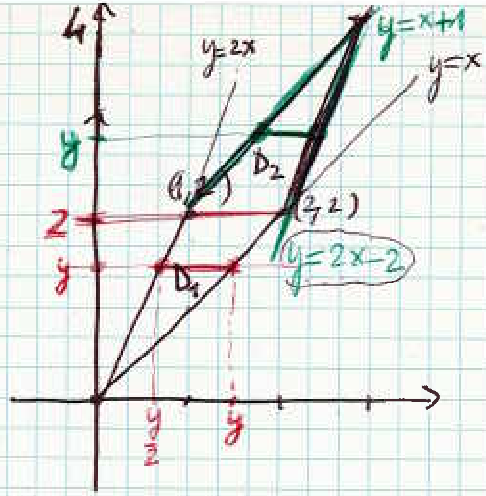
$\boxed{y=x}$ $\boxed{y=2x}$ $\boxed{y=x+1}$ $\boxed{y=2x-2}$



D parallélogramme de sommets $(0,0)$ $(1,2)$ $(3,4)$ $(2,2)$

$\begin{cases} y = x+1 \\ y = 2x-2 \end{cases}$ $x+1 = 2x-2$ $\boxed{\begin{matrix} x=3 \\ y=4 \end{matrix}}$

$\begin{cases} y = x \\ y = 2x-2 \end{cases}$ $x = 2x-2$ $\begin{matrix} x=2 \\ y=2 \end{matrix}$



$I_1 = \iint_{D_1} (2x-y)^2\,dx\,dy$

$I_2 = \iint_{D_2} (2x-y)^2\,dx\,dy$

$I = I_1 + I_2.$

$$I_1 = \iint_{D_1} (2x-y)^2\,dx\,dy \underset{\uparrow}{=} \int_0^2 \left(\int_{y/2}^{y} (2x-y)^2\,dx \right) dy$$

intégration par segments horizontaux

On calcule d'abord :

$$\int_{y/2}^{y} (2x-y)^2\,dx = \left[\frac{1}{6}(2x-y)^3 \right]_{x=y/2}^{x=y} = \frac{1}{6} y^3$$

Donc $I_1 = \int_0^2 \frac{1}{6} y^3\,dy = \frac{1}{24}\left[y^4 \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

$$I_2 = \iint_{D_2} (2x-y)^2\,dx\,dy = \int_2^4 \left(\int_{y-1}^{\frac{y+2}{2}} (2x-y)^2\,dx \right) dy =$$

$$= \int_2^4 \left(\left[\frac{1}{6}(2x-y)^3 \right]_{x=y-1}^{x=\frac{y+2}{2}} \right) dy = \frac{1}{6}\int_2^4 \left((\cancel{y}+2-\cancel{y})^3 - (2y-2-y)^3 \right) dy$$

$$= \frac{1}{6}\int_2^4 \left(8 - (y-2)^3 \right) dy \underset{\substack{\uparrow \\ u=y-2}}{=} \frac{1}{6} \cdot \left(16 - \int_0^2 u^3\,du \right) = \frac{1}{6}\left(16 - \frac{1}{4} \cdot 16 \right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 12 = 2$$

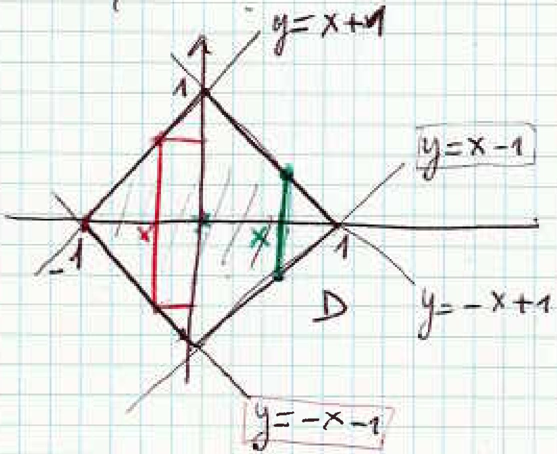
$I = I_1 + I_2 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$.

⚠ Résultat correcte : $I = 8/3$

$\boxed{16h21}$.

$\boxed{32.3}$ Calculez $I = \iint_D e^{x+y}\,dxdy$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad |x| + |y| \leq 1\}$.



$I = I_1 + I_2$

$I_1 = \iint_{D_1} e^{x+y}\,dx\,dy \qquad D_1 = D \cap \{(x,y) : x \leq 0\}$

$I_2 = \iint_{D_2} e^{x+y}\,dxdy \qquad D_2 = D \cap \{(x,y) : x \geq 0\}$

$I_1 = \iint_{D_1} e^{x+y}\,dxdy = \int_{-1}^{0}\left(\int_{-x-1}^{x+1} e^{x+y}\,dy\right)dx =$

$= \int_{-1}^{0}\left(\left[e^{x+y}\right]_{y=-x-1}^{y=x+1}\right)dx = \int_{-1}^{0}\left(e^{2x+1} - e^{-1}\right)dx$

$= \left[\frac{e^{2x+1}}{2}\right]_{x=-1}^{x=0} - e^{-1} = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) - e^{-1}$

$= \frac{1}{2}e - \frac{3}{2}e^{-1}$

$I_2 = \iint_{D_2} e^{x+y}\,dxdy = \int_0^1\left[\int_{x-1}^{-x+1} e^{x+y}\,dy\right]dx =$

$= \int_0^1\left(\left[e^{x+y}\right]_{y=x-1}^{y=-x+1}\right)dx = \int_0^1 \left(e - e^{2x-1}\right)dx$

$= e - \left[\frac{e^{2x-1}}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = e - \frac{1}{2}(e - e^{-1})$

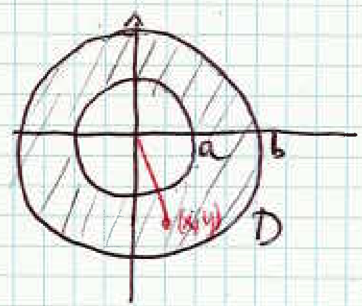
$= \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^{-1}$

$I = I_1 + I_2 = e - e^{-1} = 2\,\mathrm{sh}(1)$

Faire 32.4.

$\boxed{33}\boxed{.1}$ $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$

D= Couronne limitée par les cercles de centre O et rayons $0<a<b$



Rappel: coordonnées polaires: $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$

$\rho\geq 0$ et $\theta\in[0,2\pi]$.

$$\boxed{dxdy = \rho\, d\rho d\theta} \qquad \rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{\tilde{D}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\, d\rho d\theta$$

où $\tilde{D}=\{(\rho,\theta) : \rho\geq 0,\ \theta\in[0,2\pi]$ et $(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\in D\}$

$D=\{(x,y) : a<\|(x,y)\|<b\} = \{(x,y) : a<\sqrt{x^2+y^2}<b\}$.

$\tilde{D}=\{(\rho,\theta) : a<\rho<b\ ,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy \underset{\boxed{x^2+y^2=\rho^2}}{=} \iint_{\tilde{D}} \frac{1}{\rho^2}\,\rho\, d\rho d\theta = \iint_{\tilde{D}} \frac{1}{\rho}\, d\rho d\theta$$

$$= \iint_{[a,b]\times[0,2\pi]} \frac{1}{\rho}\cdot 1\ d\rho d\theta$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \left(\int_a^b \frac{1}{\rho}\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta\right) = \Big[\ln\rho\Big]_{\rho=a}^{\rho=b}\cdot 2\pi =$$

$$=(\ln b-\ln a)\,2\pi = 2\pi\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$\boxed{33.2}$ $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\,dxdy$ où

D est le disque de rayon $a>0$ et centre O.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad dxdy = \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$\tilde{D} = \left\{(\rho,\theta) \ : \ 0 \le \rho \le a \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi\right\}.$$

$$= [0,a] \times [0,2\pi]$$

$$\iint_D (x+y)^2 dxdy = \iint_{\tilde{D}} (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)^2 \rho \, d\rho d\theta$$

$$= \iint_{\tilde{D}} \left(\rho^3 + 2\rho^3 \cos\theta\sin\theta\right) d\rho d\theta$$

$$= \iint_{\tilde{D}} \rho^3 d\rho d\theta + \iint_{\tilde{D}} \rho^3 \sin(2\theta)\, d\rho d\theta$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \left(\int_0^a \rho^3 d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta\right) + \left(\int_0^a \rho^3 d\rho\right)\underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \sin 2\theta \, d\theta\right)}_{=0}$$

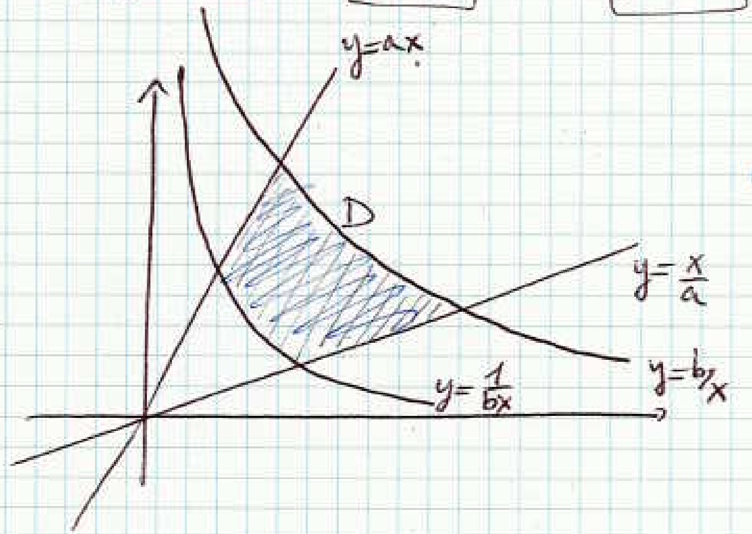
$$= \frac{1}{4} a^4 \cdot 2\pi = \frac{\pi a^4}{2}$$

$\boxed{34.1}$ Soit $a > 1$, $b > 1$.

Calculer $\iint_D 1 \, dxdy$ où

D = domaine limité par les courbes d'équation :

$\boxed{y = ax}$ $\boxed{y = \frac{x}{a}}$ $\boxed{y = \frac{b}{x}}$ $\boxed{y = \frac{1}{bx}}$



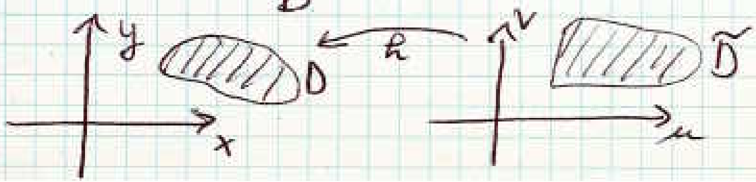
$$\iint_D 1 dxdy = \text{Aire}(D)$$

Indication : poser : $\begin{cases} x = \frac{u}{v} \\ y = uv \end{cases}$

Formule de changement de variables :

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{\tilde{D}} f(h(u,v)) \left|\det J_h(u,v)\right| du dv$$

où



$h : \tilde{D} \to D$ difféomorphisme

($= h$ bijective, de classe C^1

et $h^{-1} : D \to \tilde{D}$ de classe C^1

et $J_h(u,v) =$ matrice jacobienne de h.

ici : $h(u,v) = \left(\frac{u}{v}, uv\right)$.

$$J_h(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ v & u \end{pmatrix}$$

$$\left|\det(J_h(u,v))\right| = \left|\frac{u}{v} + \frac{u}{v^2}\cdot v\right| = \left|2\frac{u}{v}\right|$$

Construction de $\tilde{D}$:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \boxed{\frac{x}{a} \le y \le ax} \text{ et } \boxed{\frac{1}{bx} \le y \le \frac{b}{x}}\right\}$$

$$\tilde{D} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{1}{\sqrt{a}} \le v \le \sqrt{a} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{b}} \le u \le \sqrt{b}\right\}.$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = u/v \\ y = uv \end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix} y/x = \frac{uv}{u/v} = v^2 \\ xy = u^2 \end{matrix}}$$

Remarque : $h : \tilde{D} \to D$.

où $h(u,v) = \left(\frac{u}{v}, uv\right)$

est bien bijective. En effet h est inversible

et $h^{-1} : D \to \tilde{D}$

$$h^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{xy}, \sqrt{y/x}\right).$$

h et h^{-1} sont de classe C^1

Donc h est bien un difféomorphisme.

$$\iint_D 1\,dxdy = \iint_{\tilde{D}} 1 \cdot 2\frac{u}{v}\,du\,dv = \iint_{[\frac{1}{\sqrt{b}}, \sqrt{b}] \times [\frac{1}{\sqrt{a}}, \sqrt{a}]} \frac{2u}{v}\,du\,dv$$

$$= \left(\int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\sqrt{b}} 2u\,du\right)\cdot\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{v}\,dv\right) = \left[u^2\right]_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\sqrt{b}} \left[\ln v\right]_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}}$$

$$= \left(b - \frac{1}{b}\right)\cdot\left(\ln\sqrt{a} - \ln\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$= \left(b - \frac{1}{b}\right)\ln a$$