⑨ Soit (X,d) esp. métrique complet
$f : X \to X$ telle que $\boxed{f \circ f}$ contractante

Mq f possède 1 et 1 seul point fixe.

Rappel : Si $\phi : X \to X$ contractante et (X,d) complet, alors $\exists!\ x_0 \in X$ tq. $\phi(x_0) = x_0$

Montrons l'unicité du p. fixe pour f

Soient x_1 et x_2 soient points fixes pour f :

c'àd : $(S)\begin{cases} f(x_1) = x_1 \\ f(x_2) = x_2 \end{cases}$

$$f \circ f(x_1) = f(x_1) = x_1$$
$$f \circ f(x_2) = f(x_2) = x_2$$

Donc x_1 et x_2 p fixes pour $f \circ f$

Donc $x_1 = x_2$ (par l'unicité de p. fixe de $f \circ f$)

existence Mq. $\exists\, x_0 \in X$ tq. $\boxed{f(x_0) = x_0}$.

$f \circ f$ contractante. Donc $\exists\, x_0 \in X$ tq.
$$\boxed{f \circ f(x_0) = x_0}$$

Mq x_0 est p. fixe aussi pour f

On calcule :
$$d(x_0, f(x_0)) = d\big(f \circ f(x_0), \underline{f(f \circ f(x_0))}\big)$$
$$= d\big(f \circ f(x_0), (f \circ f)(f(x_0))\big)$$
$$\leq k\, d(x_0, f(x_0)).$$

$\exists k$, $\boxed{0 \leq k < 1}$

$0 \leq \alpha \leq k\alpha$

$$\alpha = \boxed{d(x_0, f(x_0)) \leq k\, d(x_0, f(x_0))}$$

$$\Rightarrow d(x_0, f(x_0)) = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = f(x_0)}$$

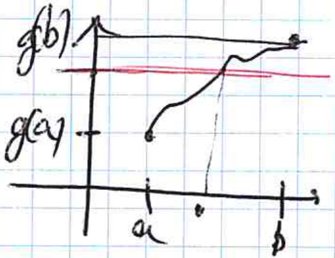
(10)

Mq si $f : [0,1] \to \boxed{[0,1]}$ est continue alors f possède au moins un point fixe.

<u>indic.</u> Appliquer le théo des valeurs intermédiaires à fonction

$$g(x) = f(x) - x .$$

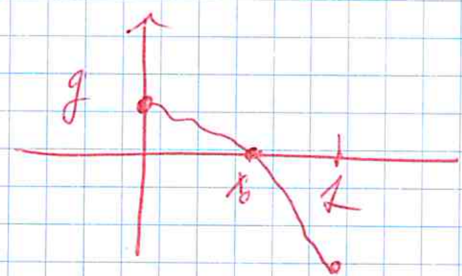
<u>Rappel</u>, TVI Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ avec g continue alors g prend toutes les valeurs comprises entre $g(a)$ et $g(b)$



Rq : $x_0 \in [0,1]$ est point fixe pour f ssi : $f(x_0) = x_0$ ssi $g(x_0) = 0$.

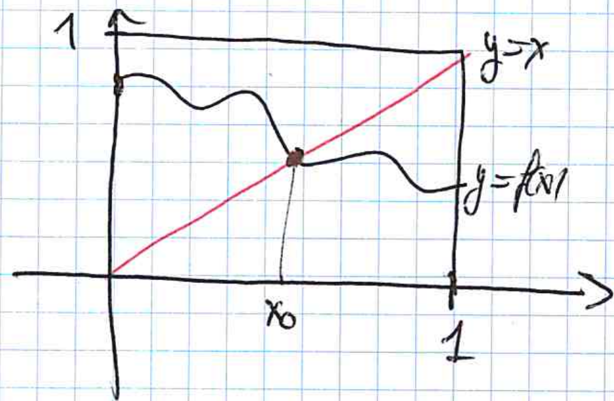
Mq $\exists\, x_0 \in [0,1]$ t.q. $g(x_0) = 0$.

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geqslant 0.$$
$$g(1) = \underbrace{f(1)}_{\leq 1} - 1 \leq 0$$



Par TVI $\exists\, x_0$ tq. $g(x_0) = 0$ et $x_0 \in [0,1]$.

Donc x_0 p. fixe pour f



(11)

$$(*)\begin{cases} x \in C^1([-1,1],\mathbb{R}) \\ x'(t) = \frac{1}{2}\sin(x(t)) \quad \forall t \in [-1,1] \\ \boxed{x(0)=1} \end{cases}$$

$$(**)\begin{cases} x \in C([-1,1],\mathbb{R}) \\ x(t) = 1 + \int_0^t \frac{1}{2}\sin(x(s))\,ds \quad \forall t \in [-1,1] \end{cases}$$

Mq x vérifie $(*)$ $\Longleftrightarrow$ x vérifie $(**)$

$\boxed{"\Rightarrow"}$ On sait que $\forall s \in [-1,1]$ on a
$x'(s) = \frac{1}{2}\sin(x(s))$

$$x(t) - \underbrace{x(0)}_{=1} = \int_0^t x'(s)\,ds = \int_0^t \frac{1}{2}\sin(x(s))\,ds$$

"$\Leftarrow$" $s \mapsto \frac{1}{2}\sin(x(s))$ est continue.

Donc $t \overset{x}{\longmapsto} 1 + \int_0^t \frac{1}{2}\sin(x(s))\,ds$ est de classe C^1 et $x'(t) = \frac{1}{2}\sin(x(t))$

Donc x vérifie $(*)$

(2) Soit $E = C([-1,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

càd : $f \in E$: $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.

définir $\boxed{\phi : E \to E}$, ϕ contractante telle que $x_0 \in E$ vérifie $x_0 = \phi(x_0)$ ssi x_0 vérifie $(**)$

On pose :

$\forall \boxed{x \in E}$ $\quad \boxed{\phi(x)} \in E$ donc $\phi(x) : [-1,1] \to \mathbb{R}$

telle que : $\boxed{\phi(x)(t) \underset{def}{=} 1 + \int_0^t \frac{1}{2}\sin(x(s))\,ds.}$

Mq ϕ contractante.

Mq $\forall$ $x, \tilde{x} \in E$ on a : $\|\phi(x) - \phi(\tilde{x})\|_\infty \leq k\|x-\tilde{x}\|_\infty$

avec $0 \leq k < 1$ (indép. de x et $\tilde{x}$).

$\forall t \in [-1,1]$ on a :

$$|\phi(x)(t) - \phi(\tilde{x})(t)| = \left|\int_0^t \frac{1}{2}\sin(x(s))\,ds - \int_0^t \frac{1}{2}\sin(\tilde{x}(s))\,ds\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int_0^t [\sin(x(s)) - \sin\tilde{x}(s)]\,ds\right| \leq \ldots$$

$$\dots \leq \frac{1}{2} \int_0^t |\sin(x(s)) - \sin(\tilde{x}(s))| \, ds$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^t \underbrace{|x(s) - \tilde{x}(s)|}_{\leq \|x-\tilde{x}\|_\infty} \, ds$$

$$\leq \frac{1}{2} \|x-\tilde{x}\|_\infty \cdot \underbrace{\int_0^t 1 \, dt}_{\leq 1}.$$

$$\leq \frac{1}{2} \|x-\tilde{x}\|_\infty$$

Donc : $\forall t \in [-1,1]$:

$$|\phi(x)(t) - \phi(\tilde{x})(t)| \leq \frac{1}{2} \|x-\tilde{x}\|_\infty.$$

Donc $\|\phi(x) - \phi(\tilde{x})\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|x-\tilde{x}\|_\infty.$

Donc $\phi : E \to E$ est bien contractante.

Mais $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ est complet pour la dist. du sup.

Donc ϕ possède 1 et 1 seul point fixe

c'à'd : $\exists! \, x_0 \in E$ tq. $\boxed{\phi(x_0) = x_0}$

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{\xi \in [a,b]} |f'(\xi)| \, |b-a|$$ IAF.

$\boxed{f = \sin}$

$$\boxed{|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b-a|}$$

$\underbrace{\phi(x_0)}_{\Uparrow\, E} = \underset{\Uparrow\, E}{x_0}$ Donc :

$\forall t \in [-1,1]$:

$$x_0(t) = \phi(x_0)(t) = 1 + \int_0^t \frac{1}{2} \sin(x_0(s)) \, ds.$$

x_0 est solution de (**).

(12) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n} \qquad \forall n \geq 0$$

Mq $\exists!$ choix de x_0 t.q. la suite (x_n) ~~est compris~~ vérifie: $(x_n) \subset [10, 11]$

1ère étape :

ℓ^∞ = espace vect. des suites réelles bornées

$\|(y_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n|$

$$Y = \{(y_n) \in \ell^\infty \text{ t.q. } \forall n \in \mathbb{N} : \boxed{10 \leq y_n \leq 11}\}.$$

$\boxed{Y \subset \ell^\infty}$ $\qquad d((y_n),(\tilde{y}_n)) = \|(y_n)-(\tilde{y}_n)\|_\infty$

Mq (Y,d) est un espace métrique complet

(•) $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est de Banach (= esp. métrique complet avec la dist. du sup)

(•) Toute partie fermée dans un complet est un espace métrique complet

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(E, \|\cdot\|)$ $\qquad d(e, e') = \|e - e'\|$

Mq Y est fermé dans ℓ^∞.

$$Y = \overline{B}(\dots, \dots)$$

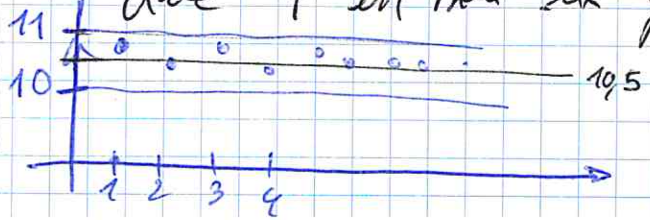
$$Y = \{(y_n) \in \ell^\infty : \forall n \ \boxed{|y_n - 10{,}5| \leq \tfrac{1}{2}}\}$$

Soit $\vec{c} = (10{,}5 ; 10{,}5 ; 10{,}5 ; \dots)$

$c_n = 10{,}5$

$$Y = \{(y_n) \in \ell^\infty : \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n - c_n| \leq \tfrac{1}{2}\}$$
$$= \{(y_n) \in \ell^\infty : \|(y_n) - \vec{c}\|_\infty \leq \tfrac{1}{2}\}$$
$$= \overline{B}(\vec{c}, \tfrac{1}{2})$$

donc Y est bien un fermé de ℓ^∞.



$\boxed{2^{\text{ème}} \text{ étape}}$

Soit $\boxed{F : Y \to Y}$ où

$\forall (y_n) \in Y : F((y_n)) = (z_n)$

avec $z_n = \sqrt{100 + y_{n+1} - \sin n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Mq F bien définie ⟵ OK

2) Mq F est contractante

1) en effet $\forall (y_n) \in Y$, $10 \leq y_{n+1} \leq 11$

$$100 + y_{n+1} - \sin n \geq 100 + 10 - 1 = 109 \geq 0$$

donc, $\forall n \in \mathbb{N}$ z_n bien défini.

Mq $\forall n \in \mathbb{N}$: $10 \leq z_n \leq 11$

$$10 \leq \sqrt{109} \leq z_n \leq \sqrt{100 + 11 + 1} \leq \sqrt{112} \leq 11$$

Donc $10 \leq z_n \leq 11 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $(z_n) \in Y$

$\boxed{-\sin n \leq 1}$

$\exists\ 0 \leq k < 1$ tq.

2) Mq $\forall (y_n), (\tilde{y}_n) \in Y$,

$$\| F(y_n) - F(\tilde{y}_n) \|_\infty \leq k \| (y_n) - (\tilde{y}_n) \|_\infty .$$

On pose : $(\tilde{z}_n) = F(\tilde{y}_n)$ où $\tilde{z}_n = \sqrt{100 + \tilde{y}_{n+1} - \sin n}$ $\quad\|\quad (z_n) = F(y_n)$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $|z_n - \tilde{z}_n| = \left| \sqrt{100 + y_{n+1} - \sin n} - \sqrt{100 + \tilde{y}_{n+1} - \sin n} \right|$

$$= |g(y_{n+1}) - g(\tilde{y}_{n+1})|$$

Soit $g(x) = \sqrt{100 + x - \sin n}$

$g : [10, 11] \to \mathbb{R}$.

$$\leq \underbrace{\left(\sup_{\xi \in [10,11]} |g'(\xi)| \right)}_{\leq \frac{1}{2\sqrt{109}}} \cdot \underbrace{|y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1}|}_{\leq \|(y_n) - (\tilde{y}_n)\|_\infty}$$

$g'(\xi) = \dfrac{1}{2\sqrt{100 + \xi - \sin n}}$

Donc $|z_n - \tilde{z}_n| \leq \dfrac{\|(y_n) - (\tilde{y}_n)\|_\infty}{2\sqrt{109}}$

$|g'(\xi)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{109}} < 1$

Donc par passage au $\sup_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\| \underbrace{(z_n)}_{=F((y_n))} - \underbrace{(\tilde{z}_n)}_{=F((\tilde{y}_n))} \|_\infty \leq \frac{1}{2\sqrt{109}} \|(y_n) - (\tilde{y}_n)\|_\infty$$

Donc F est $\frac{1}{2\sqrt{109}}$ - lipschitzienne <1

Donc F contraction. $F : Y \to Y$

Conclusion. F possède 1 et 1 seul point fixe $\boxed{(x_n) \in Y}$.

$\exists! \, (x_n) \in Y$ tq. $F((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

c'à'd : $\forall n$:
$$x_n = F(x_n) = \sqrt{100 + x_{n+1} - \sin n}$$
$$x_n^2 = 100 + x_{n+1} - \sin n.$$
$$(*) \quad \boxed{x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n.}$$

Donc $\exists!$ suite (x_n) vérifiant $(*)$ tq. $(x_n) \subset [10, 11]$.

Donc $\exists! \, x_0 \in \mathbb{R}$ tq. la suite définie par $(*)$ vérifie : $(x_n) \subset [10, 11]$.

(13) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq 5\}$

$$(S) \begin{cases} x = 2 + \alpha(1 + e^{x-5} + \cos y) \\ y = 3 + \beta(e^{x-5} - \sin y) \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Trouver un ensemble de paramètres α et β t.q. (S) possède 1 et 1 seule solution dans A.

Indic : Construire une contraction

$$\phi : (A, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (A, \|\cdot\|_1)$$

où $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$

On veut définir ϕ telle que :

$\boxed{(x,y) \text{ point fixe de } \phi}$ ssi $\boxed{(x,y) \text{ solution de } (S)}$

en effet, (x,y) sol. de $(S) \Leftrightarrow (x,y) = \phi(x,y)$

On pose :

$\phi : A \to A$ telle que

$$\phi(x,y) = \big(\underbrace{2 + \alpha(1 + e^{x-5} + \cos y)}_{\leq 5} \; ; \; 3 + \beta(e^{x-5} - \sin y)\big)$$

1ère étape : Mq ϕ bien définie $\leftarrow$

2ème étape Mq $\phi : (A, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (A, \|\cdot\|_1)$ contraction

1ère étape

Mq : $2 + \alpha(1 + e^{x-5} + \cos y) \leq 5 \quad \forall (x,y) \in A$

c.à.d : Mq $\alpha(1 + e^{x-5} + \cos y) \leq 3 \quad \forall x \leq 5, \forall y \in \mathbb{R}$.

Cela fonctionne à condition que :

$$\alpha(1 + e^{x-5} + 1) \leq 3 \quad \forall x \leq 5$$

Cela fonctionne à condition que :

$$\alpha(1 + 1 + 1) \leq 3$$

$$3\alpha \leq 3$$

$$\boxed{\alpha \leq 1}$$

$$\boxed{\alpha \leq 1}$$

Conclusion, si $\alpha \leq 1$ on a bien $\phi : A \to A$ et ϕ bien définie

② On cherche α et β t.q. $\exists\ 0 \leq k < 1$ t.q.

$\forall (x,y) \in A$
$\forall (x',y') \in A$ on a:

$$\|\phi(x,y) - \phi(x',y')\|_1 \leq k \|(x,y) - (x',y')\|_1$$

(*) en effet: $\forall\ x, x' \leq 5$ on a,

$$|e^{x-5} - e^{x'-5}| \leq \underbrace{\left(\sup_{\xi \leq 0} |e^{\xi}|\right)}_{\leq 1} |x-x'| \leq |x-x'|$$

On a $\|\phi(x,y) - \phi(x',y')\|_1 = \left\|\left(\cancel{2}+\alpha(\cancel{1}+e^{x-5}+\cos y)\ ;\ \cancel{3}+\beta(e^{x-5} - \sin y)\right) - \left(\cancel{2}+\alpha(\cancel{1}+e^{x'-5}+\cos y')\ ;\ \cancel{3}+\beta(e^{x'-5} - \sin y')\right)\right\|_1$

$$= \left|\alpha\left(e^{x-5} + \cos y - e^{x'-5} - \cos y'\right)\right| + \left|\beta\left(e^{x-5} - \sin y - e^{x'-5} + \sin y'\right)\right|$$

$$\leq |\alpha| \Big[\underbrace{|e^{x-5} - e^{x'-5}|}_{\overset{(*)}{\leq} |x-x'|} + \underbrace{|\cos y - \cos y'|}_{\leq |y-y'|}\Big] + |\beta| \cdot \Big[\underbrace{|e^{x-5} - e^{x'-5}|}_{\leq |x-x'|} + \underbrace{|\sin y - \sin y'|}_{\leq |y-y'|}\Big]$$

$$\leq (|\alpha| + |\beta|) \left[|x-x'| + |y-y'|\right]$$

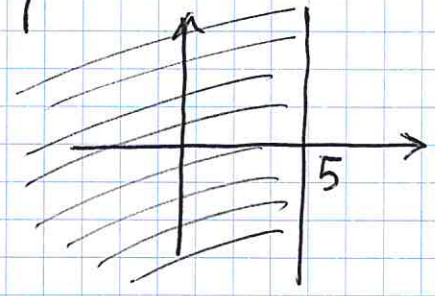
$$= (|\alpha| + |\beta|) \|(x,y) - (x',y')\|_1$$

Conclusion. Si $\boxed{|\alpha| + |\beta| < 1}$ alors ϕ est bien une contraction : $\phi : (A, \|\cdot\|_1) \to (A, \|\cdot\|_1)$

On suppose désormais $\boxed{|\alpha| + |\beta| < 1}$

$(A, \|\cdot\|_1)$ est complet

en effet



$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ est complet **FAIT**

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ est complet puisque $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_1$ sont équiv.

A fermé dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ exercice $\quad A =]-\infty, 5] \times \mathbb{R}$

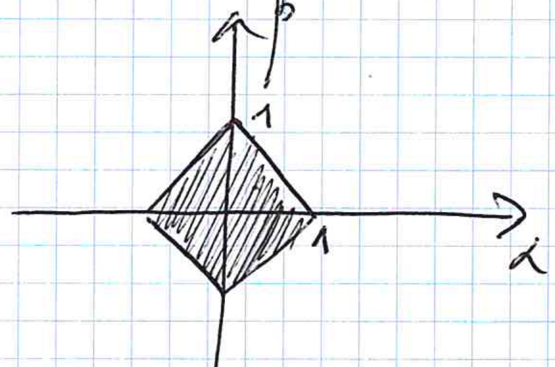
A ——— $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$

sous la condition $\boxed{|\alpha| + |\beta| < 1}$

$(A, \|\cdot\|_1)$ est complet.

Donc ϕ possède un et un seul point fixe dans A.

Donc ~~ϕ~~ le système (S) possède une et une seule solution dans A.



$|\alpha| + |\beta| = \|(\alpha, \beta)\|_1 < 1$

exos (14) à (17)

Refaire l'exo avec $\phi : (A, \|\cdot\|_\infty) \to (A, \|\cdot\|_\infty)$