# Contrôle n. 2 – Corrigé

4 mai 2021

**Exercice 1** (Equations différentielles)**.** Cet exercice a été plutôt bien réussi dans l'ensemble. Seule la question 4 semble avoir posé problème. Voici quelques éléments de correction pour les questions 2 et 4.

**Question 2**. La solution générale du problème homogène est

$$y_h(t) = \lambda e^t + \mu e^{-2t}, \qquad \text{pour } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation est constant. Nous cherchons donc une solution particulière $y_p$ qui soit une fonction constante $y_p(t) = a$, avec $a \in \mathbb{R}$. En calculant $y_p'' + y_p' - 2y_p$, on voit que $y_p$ est solution si et seulement si $a = -1/2$.

**Question 4**. La solution générale du problème homogène est

$$y_h(t) = \lambda e^{-t}, \qquad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}.$$

En revanche, le second membre ne correspond à aucune des formes habituelles. Pour trouver une solution particulière, l'idée est de linéariser $\cos^2$ pour s'y ramener. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cos^2(t) = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2t)\big).$$

On considère donc $y_1$ et $y_2$ des solutions (particulières) des équations différentielles

$$y_1' + y_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad y_2' + y_2 = \frac{1}{2}\cos(2t). \tag{1}$$

Pour la première de ces équations, le second membre est constant. Nous pouvons donc chercher une solution particulière constante, $y_1(t) = 1/2$. Pour la seconde équation, nous allons "complexifier" : si $z_2$ est une solution de l'équation différentielle

$$z_2' + z_2 = \frac{1}{2}e^{2it},$$

alors $y_2 = \mathrm{Re}(z_2)$ est solution de la deuxième équation dans (1). Le second membre de cette dernière équation est de la forme $ae^{bt}$, nous cherchons donc une solution de de la même forme $z_2(t) = \alpha e^{2it}$. On a :

$$z_2'(t) + z_2(t) = \alpha(2i+1)e^{2it} = \frac{1}{2}e^{2it},$$

ce qui entraine

$$\alpha = \frac{1}{2(1+2i)} = \frac{1-2i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{5}i.$$

et donc

$$y_2(t) = \frac{1}{10}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t).$$

On en déduit la solution générale de l'équation :

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t) + \lambda e^{-t}, \qquad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 2** (Intégration)**.** La réussite de cet exercice a été plutôt inégale. Il fallait bien noter que la question 1 demandait de faire le changement de variable *dans l'intégrale*. Autrement, on ne se ramènerait pas à une boule centrée en 0...

**Question 1**. On considère le changement de variable $u = x - 1$ et $y = y + 1$ (c'est une translation de vecteur $(-1, 1)$). La matrice jacobienne associée est

$$\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est de déterminant égal à 1. Par ailleurs, la boule $B' = (-1, 1) + B$ est l'image de la boule $B$ par ce changement de variable. On en déduit

$$I = \iint_B \Big(x^2 + y^2 - 2x + 2y\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{B'} \Big(u^2 + v^2 - 2\Big)\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{2}$$

**Question 2**. Pour répondre à cette question, il fallait utiliser les coordonnées polaires dans (2). Ce changement de variables se résume par

$$u = r\cos(\theta), \quad v = r\sin(\theta) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}u\mathrm{d}v = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Le domaine d'intégration est la boule $B'$ centrée en 0 et de rayon 10 (et donc pas la boule $B$). En coordonnées polaires, elle est délimitée par l'inégalité $r \leq 10$ (alors que la boule $B$ est définie par une inégalité plus complexe). Nous en déduisons

$$I = \int_0^{10} \int_0^{2\pi} (r^2 - 2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} - r^2\right]_0^{10} = 4800\pi. \tag{3}$$

**Exercice 3** (Courbes paramétrées)**.** Cet exercice a été très peu réussi, compte tenu du temps passé en TD sur ce chapitre. Les notions et méthodes en jeu font parties des bases à savoir sur les courbes paramétrées.

**Question 1**. On commence par calculer la dérivée $\gamma'(0)$. On a :

$$\gamma'(t) = \Big(2t - 2, \frac{\pi}{2}\cos\Big(\frac{\pi}{2}t\Big)\Big)$$

et donc $\gamma'(0) = (-2, \pi/2)$. Comme $\gamma(0) = 0$, la tangente à la courbe en $\gamma(0)$ est une droite qui passe par l'origine et de pente $-\pi/4$. Son équation *cartésienne* sera donc

$$y + \frac{\pi}{4}x = 0.$$

**Question 2**. On observe que $\gamma'(1) = 0$, ce qui signifie que la paramétrisation n'est *pas* régulière.

**Question 3**. La tangente à la courbe n'est pas définie par la dérivée $\gamma'(1)$, puisque celle-ce est nulle. En revanche, sa pente (si elle existe) est donnée par la limite

$$a = \lim_{h \to 0^+} \frac{y(1-h) - y(1)}{x(1-h) - x(1)}.$$

Pour calculer cette limite (qui est une forme indéterminée), on effectue un développement limité en $h \to 0^+$. On a :

$$\frac{y(1-h) - y(1)}{x(1-h) - x(1)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}h\right) - 1}{(1+h)^2 - 2(1+h) + 1} = \frac{1}{h^2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}h\right) - 1\right).$$

En utilisant ensuite le développement limité du cosinus autour de 0, on obtient

$$\frac{y(1-h)-y(1)}{x(1-h)-x(1)} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{\pi}{2}h\right)^2 + O\left(h^4\right)\right) = -\frac{\pi^2}{8} + O\left(h^2\right).$$

Cela signifie que la pente de la tangente est $a = -\pi^2/8$. Comme la tangente passe par $\gamma(1) = (-1,1)$, son équation cartésienne est

$$y + \frac{\pi^2}{8}x = 1 - \frac{\pi^2}{8}.$$

*Remarque : comme les tangentes ne sont pas difficiles à tracer, leurs graphes sont omis dans ce corrigé.*