Cours à distance d'analyse pour l'économie 2

Lorenzo Brandolese

Université de Lyon
Institut Camille Jordan

Printemps 2020

Quelques rappels sur les espaces métriques (1)

- Un *espace métrique* est un couple (X, d) formé par un ensemble et une distance Les éléments de X s'appellent *points*. Par définition, un *distance* (ou *métrique*) sur X est une application $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, telle que, pour tout x, y et $z \in X$,

  i) $d(x,y) = 0 \iff x = y,$ ii) $d(x,y) = d(y,x),$ iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$

- Pour $r > 0$ et $x \in X$, la boule centrée en x et de rayon $r > 0$ est l'ensemble $B(x,r) = \{y \in X \colon d(x,y) < r\}$.
  - Dans un espace métrique, un ensemble U est dit *ouvert* si, pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que. $B(x,r) \subset U$.
  - Un ensemble est dit *fermé* si sont complémentaire dans X est un ensemble ouvert.

Rappels (2)

- Une suite dans un espace métrique X est une application $\mathbb{N} \to X$. Elle est notée généralement $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (x_n). Soit (x_n) une suite d'un espace métrique (X, d) et $x \in X$.
    - On dit la suite (x_n) converge vers x, et on écrit $x_n \to x$ ou encore $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ si, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $x_n \in B(x, \epsilon)$ (autrement dit, $d(x_n, x) < \epsilon$).
    - Si la suite ne converge vers aucun point, on dit qu'elle *diverge*.
    - Dans le cas général on voit que $x_n \to x \iff d(x_n, x) \to 0$.
    - Le "théorème d'unicité de la limite" affirme que si on a une suite telle que $x_n \to x$ et $x_n \to y$, alors $x = y$.
- L'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A d'un espace métrique X est le plus petit fermé contenant A. Un point $x \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n) \subset A$ telle que $x_n \to x$.

Rappels (3)

- Une application $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue en x si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : $d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$. La continuité peut se caractériser par les suites : f est continue en x si et seulement si pour toute suite (x_n) convergente vers x on a $f(x_n)$ convergente vers $f(x)$.
- Une application $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ entre deux espaces métriques est dite k-lipschitzienne (où $k \geq 0$) si et seulement si, pour tout $x, x' \in X$ on a $d_Y(f(x), f(x')) \leq k\, d_X(x, x')$. Elle est dite lipschitzienne s'il existe $k \geq 0$ telle qu'elle est k-lipschitzienne. Les applications lipschitziennes sont continues.

Suites de Cauchy et espaces complets

Definition 1

Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n) \subset X$ est **de Cauchy** si $\forall\, \epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq n_0$ on a $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Proposition 1.1

1. *Si (x_n) converge, alors (x_n) est une suite de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Dém.

Suites de Cauchy et espaces complets

Definition 1

Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n) \subset X$ est **de Cauchy** si $\forall\ \epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq n_0$ on a $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Proposition 1.1

1. *Si (x_n) converge, alors (x_n) est une suite de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Dém.

1. Si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $\epsilon > 0$, il existe un n_0 tel que $d(x_n, x) < \epsilon/2$ si $n \geq n_0$. Si $m, n \geq n_0$, on trouve alors $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \epsilon$.
2. Pour la démonstration de la seconde affirmation, il suffit d'applique la définition de suite de Cauchy avec $\epsilon = 1$. On trouve qu'il existe n_0 tel que, pour tout $m \geq n_0$ on a $d(x_m, x_{n_0}) \leq 1$. Mais alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $d(x_m, x_{n_0}) \leq R$, où

$$R = \max\{1, d(x_i, x_{n_0}) \colon 0 \leq i \leq n_0\}.$$

$\square$

Question. A-t-on l'équivalence : (x_n) de Cauchy $\iff$ (x_n) converge ?

Question. A-t-on l'équivalence : (x_n) de Cauchy $\iff$ (x_n) converge ?

Exemple 1.1

Dans l'espace métrique $(\mathbb{Q}, d)$, où $d(x, y) = |x - y|$ est la distance euclidienne, considérons la suite (x_n) définie par

$$x_n = E(2^n\sqrt{2})/2^n$$

Question. A-t-on l'équivalence : (x_n) de Cauchy $\iff$ (x_n) converge ?

Exemple 1.1

Dans l'espace métrique $(\mathbb{Q}, d)$, où $d(x, y) = |x - y|$ est la distance euclidienne, considérons la suite (x_n) définie par

$$x_n = E(2^n\sqrt{2})/2^n$$

Ici $E(\alpha)$ désigne la partie entière du nombre réel α, c'est à dire le plus grand entier inférieur ou égale à α. Il s'agit bien d'une suite de nombres rationnels.
On vérifie que

$$x_n \to \sqrt{2}.$$

Conclusion :
la suite (x_n) est de Cauchy dans $(\mathbb{Q}, d)$, mais elle est divergente dans $(\mathbb{Q}, d)$.

Definition 2

Un espace métrique (X, d) est **complet** si et seulement si toute suite de Cauchy $(x_n) \subset X$ est convergente dans X.
Un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est **de Banach** si et seulement si E est complet pour la distance associée à $\|\cdot\|$.

Exemple 1.2

- $\mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle dans $\mathbb{R}$ n'est donc pas complet, comme l'exemple précédent le montre.

Question. L'intervalle $]0, +\infty[$ est-il complet ?

Exemple 1.2

- $\mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle dans $\mathbb{R}$ n'est donc pas complet, comme l'exemple précédent le montre.

Question. L'intervalle $]0, +\infty[$ est-il complet ?

Non.

- Il suffit, pour le voir, de construire une suite de Cauchy $(x_n) \subset]0, \infty[$ qui ne converge pas dans $]0, \infty[$.
- La suite $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, convient à cet effet.

Théorème 1.2

$\mathbb{R}$ *est complet.*

Dém.

Théorème 1.2

$\mathbb{R}$ *est complet.*

Dém.

Soit $(x_n) \subset \mathbb{R}$ une suite réelle de Cauchy. Il s'agit de montrer que (x_n) converge dans $\mathbb{R}$. Soient

$$A_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots, \},$$

$$a_n = \inf A_n \qquad b_n = \sup A_n.$$

On a $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, car A_n est borné. Clairement,

- $a_n \leq b_n$,
- (a_n) est croissante,
- (b_n) décroissante.

Vérifions que

- $b_n - a_n \to 0$:

Soit $\epsilon > 0$. Il existe un n_0 tel que $|x_n - x_m| < \epsilon/2$ si $n, m \geq n_0$. Pour $n \geq n_0$, on a donc $A_n \subset [x_{n_0} - \epsilon/2, x_{n_0} + \epsilon/2]$, ce qui implique $x_{n_0} - \epsilon/2 \leq a_n \leq b_n \leq x_{n_0} + \epsilon/2$; d'où $b_n - a_n \leq \epsilon$.

Il s'ensuit que les suites (a_n), (b_n) sont adjacentes. Par conséquent, il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \to a$, $b_n \to a$. Comme $a_n \leq x_n \leq b_n$, on trouve $x_n \to a$. $\square$

Proposition 1.3

Soit $k \in \mathbb{N}$. *Alors* $\mathbb{R}^k$, *muni de la distance euclidienne, est complet.*

Dém.

Proposition 1.3

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors $\mathbb{R}^k$, muni de la distance euclidienne, est complet.

Dém.

Soit $(\mathbf{x}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de vecteurs de $\mathbb{R}^k$. Il s'agit de construire $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ t.q.

$$\mathbf{x}^n \to \mathbf{x} \qquad \text{dans } \mathbb{R}^k.$$

On a $\mathbf{x}^n = (x_1^n, \ldots, x_k^n)$. Mais,

$$\forall\, j = 1, \ldots, k : \quad |x_j^n - x_j^m| \leq \|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^m\|_2.$$

Fixons l'indice j : il s'ensuit que $(x_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, qui est complet et qu'alors cette suite converge vers une limite x_j.
Mais alors

$$x_j^n \to x_j, \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Posons $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$. La suite de vecteurs x^n converge composante par composante vers le vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$.
Mais alors

$$\mathbf{x}^n \to \mathbf{x} \quad \text{dans } \mathbb{R}^k.$$

$\square$

Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.

Proposition 1.4

1. *Si (A, d) est complet, alors A est un fermé de X.*
2. *Si (X, d) est complet et A est un fermé de X, alors (A, d) est complet.*

Dém.

Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.

Proposition 1.4

1. *Si (A, d) est complet, alors A est un fermé de X.*
2. *Si (X, d) est complet et A est un fermé de X, alors (A, d) est complet.*

Dém.

1. Soit $a \in \overline{A}$. Il existe $(x_n) \subset A$ telle que $x_n \to a$.
   Alors (x_n) est une suite de Cauchy, donc convergente (dans A, puisque A est complet) vers un point $b \in A$.
   L'unicité de la limite (dans X) implique $a = b \in A$.
   Il s'ensuit que $\overline{A} \subset A$, d'où A fermé.
2. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans A.
   Alors il existe un $a \in X$ tel que $x_n \to a$.
   Il s'ensuit que $a \in A$, et donc (x_n) converge dans A.

$\square$

Corollaire 1.5

Si A est un sous-ensemble d'un espace métrique complet (en particulier, si $A \subset \mathbb{R}^n$) :

$$A \text{ complet} \iff A \text{ fermé.}$$

Definition 3

Soit (X, d) un espace métrique. Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite bornée si son image $f(X) = \{f(x) \colon x \in X\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$. On désigne

$$C_b(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \,;\, f \text{ continue et bornée}\}.$$

Example 4

Definition 3

Soit (X, d) un espace métrique. Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite bornée si son image $f(X) = \{f(x) \colon x \in X\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$. On désigne

$$C_b(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}\ ; f \text{ continue et bornée}\}.$$

Example 4

La fonction $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, où $f(x, y, z) = \sin(xy) + \cos z$ vérifie

$$f \in C_b(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}),$$

puisque

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \quad -2 \leq f(x, y, z) \leq 2$$

donc l'image $f(\mathbb{R}^3)$ est contenue dans la partie bornée $[-2, 2] \subset \mathbb{R}$.

Observations

- Si K est compact, alors toutes les fonctions continues sont bornées par le théorème de Weierstrass. Donc $C_b(K, \mathbb{R}) = C(K, \mathbb{R})$.
- La somme de deux fonctions continues et bornée est une fonction continue et bornée. Et si on multiplie une fonction continue et bornée par un nombre réel on obtient une autre fonction continue et bornée. Donc $C_b(X, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Definition 5

- La "norme du sup" sur $C_b(X, \mathbb{R})$ est
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$
(les axiomes de norme sont faciles à vérifier).
- On définit une distance δ sur l'ensemble $C_b(X, \mathbb{R})$ (dite "distance du sup"), par
$$\forall\, f, g \in C_b(X, \mathbb{R}): \qquad \delta(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

La norme $\|\cdot\|_\infty$ induit bien entendu la distance δ par la relation usuelle
$$\delta(f, g) = \|f - g\|_\infty.$$

Exemple 1.3

Definition 5

- La "norme du sup" sur $C_b(X,\mathbb{R})$ est
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$
(les axiomes de norme sont faciles à vérifier).
- On définit une distance δ sur l'ensemble $C_b(X,\mathbb{R})$ (dite "distance du sup"), par
$$\forall\, f,g \in C_b(X,\mathbb{R}): \qquad \delta(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x)-g(x)|.$$

La norme $\|\cdot\|_\infty$ induit bien entendu la distance δ par la relation usuelle
$$\delta(f,g) = \|f-g\|_\infty.$$

Exemple 1.3

Soit $X=[0,1]$, et $f(x)=\exp(x)$, $g(x)=\exp(2x)$. On a $f,g\in C_b([0,1],\mathbb{R})$.

Question. Que vaut $\delta(f,g)$?

On a
$$\delta(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |e^x - e^{2x}| = \max_{x\in[0,1]} (e^{2x}-e^x) = e^2 - e.$$

Si une suite de fonctions $(f_n) \subset C_b(X, \mathbb{R})$ converge vers $f \in C_b(X, \mathbb{R})$, c'est à dire $f_n \xrightarrow{\delta} f$, on dit que (f_n) converge *uniformément* vers f. Plus explicitement, cela signifie que

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

Exemple 1.4

Soit $X = [0, 1]$ et $f_n(x) = e^{x/n}$.

Si une suite de fonctions $(f_n) \subset C_b(X, \mathbb{R})$ converge vers $f \in C_b(X, \mathbb{R})$, c'est à dire $f_n \xrightarrow{\delta} f$, on dit que (f_n) converge *uniformément* vers f. Plus explicitement, cela signifie que

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

Exemple 1.4

Soit $X = [0,1]$ et $f_n(x) = e^{x/n}$.
Pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \to 1$. Soit f la fonction constante égal à 1.
On a, pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f_n(x) - f(x)| = |e^{x/n} - 1| \leq e^{1/n} - 1.$$

Donc $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq e^{1/n} - 1 \to 0$. On conclut que $\delta(f_n, f) \to 0$.

Observons que, parfois, l'on a $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$ (autrement dit, on a *convergence simple* de (f_n) vers f) sans qu'il y ait convergence uniforme.

Proposition 1.6

La limite uniforme de fonctions continues et bornées est continue et bornée : si $(f_n) \subset C_b(X,\mathbb{R})$ et $f : X \to \mathbb{R}$ est telle que $f_n \xrightarrow{\delta} f$, alors $f \in C_b(X,\mathbb{R})$.

Dém.

Soit $f_n \xrightarrow{\delta} f$ et $x \in X$. Pour démontrer que f est continue en x on considère $\epsilon > 0$. On sait alors qu'il existe n_0 tel que $\delta(f, f_n) < \epsilon/3$ pour tout $n \geq n_0$. On a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x')| + |f_n(x') - f(x')| \\ &\leq 2\delta(f, f_n) + |f_n(x) - f_n(x')| \leq 2\epsilon/3 + |f_n(x) - f_n(x')|. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité ci-dessus avec $n = n_0$ et le fait que f_{n_0} est continue en x, on trouve qu'il existe $\eta > 0$ tel que, si $d(x, x') < \eta$, alors $\delta(f, f_n) < \epsilon/3$ et donc $|f(x) - f(x')| < \epsilon$. Ceci assure que $f : X \to \mathbb{R}$ est bien continue.
De plus, par définition de convergence avec $\epsilon = 1$, on voit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \\ &\leq \delta(f, f_{n_0}) + |f_{n_0}(x)| \leq 1 + |f_{n_0}(x)|. \end{aligned}$$

Si l'on passe au sup,

$$\sup_{x\in X} |f(x)| \leq 1 + \sup_{x\in X} |f_{n_0}(x)| < \infty$$

puisque f_{n_0} est une fonction bornée et donc f est elle même bornée. $\square$

Proposition 1.7

$C_b(X,\mathbb{R})$ est un espace métrique complet pour la distance du sup. *Il s'agit donc d'un espace de Banach.*

Dém.

Si (f_n) est une suite de Cauchy dans $C_b(X,\mathbb{R})$, alors, pour tout $x \in X$, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (et donc convergente, parce que $\mathbb{R}$ est complet).

Introduisons la fonction $f \colon X \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Il s'agit de montrer que $f_n \xrightarrow{\delta} f$ (et donc $f \in C_b(X,\mathbb{R})$ d'après la propostion précédente) :

Soit $\epsilon > 0$. Il existe un n_0 tel que, si $n, m \geq n_0$, alors $\delta(f_n, f_m) < \epsilon/2$. Pour tout $x \in X$, on a donc alors $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon/2$ si $n \geq n_0$. Passons à la limite dans cette inégalité pour $m \to +\infty$. Ceci donne $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon/2$ pour $n \geq n_0$. Mais alors $\delta(f_n, f) \leq \epsilon/2 < \epsilon$ pour $n \geq n_0$. Il s'ensuit $f_n \xrightarrow{\delta} f$. □

Applications de la proposition précédente

Exemple 1.5 (à connaître !)

Si $a < b$, alors $C([a,b],\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme du sup.

Une autre application intéressante est fournie par la proposition suivante.

Proposition 1.8 (à connaître !)

On désigne avec ℓ^∞ l'espace vectoriel de toutes les suites réelles bornées :
$\ell^\infty = \{x = (x_n) \subset \mathbb{R}\ ;(x_n)$ *bornée*$\}$. *On munit ℓ^∞ de la norme* $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.
Alors ℓ^∞ est un espace de Banach pour la distance induite de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Dém.

Applications de la proposition précédente

Exemple 1.5 (à connaître !)

Si $a < b$, alors $C([a, b], \mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme du sup.

Une autre application intéressante est fournie par la proposition suivante.

Proposition 1.8 (à connaître !)

On désigne avec ℓ^∞ l'espace vectoriel de toutes les suites réelles bornées : $\ell^\infty = \{x = (x_n) \subset \mathbb{R}\,;(x_n) \text{ bornée}\}$. *On munit ℓ^∞ de la norme* $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$. *Alors ℓ^∞ est un espace de Banach pour la distance induite de la norme $\|\cdot\|_\infty$.*

Dém.

On a

$$\ell^\infty = C_b(\mathbb{N}, \mathbb{R}).$$

En effet, on peut voir une suite (bornée) comme une fonction : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (bornée) et réciproquement. D'autre part, toute fonction : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est continue (il suffit d'appliquer la définition de continuité avec $\epsilon < 1/2$ pour s'en convaincre).
Mais alors le résultat de cette proposition est une conséquence immédiate de celle de la proposition précédente avec $X = \mathbb{N}$. $\square$

Definition 6

Une application $f : (X, d) \to (Y, D)$ est *contractante* s'il existe $0 \leq k < 1$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Definition 6

Une application $f : (X, d) \to (Y, D)$ est *contractante* s'il existe $0 \leq k < 1$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Exemple 1.6

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \arctan(\frac{x}{2})$ est contractante.

Definition 6

Une application $f : (X, d) \to (Y, D)$ est *contractante* s'il existe $0 \leq k < 1$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Exemple 1.6

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \arctan(\frac{x}{2})$ est contractante.

En effet, pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$ (on pourra supposer $x < x'$) on a, par l'inégalité des accroissements finis,
$|f(x) - f(x')| \leq \sup_{\xi \in [x,x']} |f'(\xi)|\, |x - x'| \leq \sup_{\xi \in [x,x']} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(x/2)^2} |x - x'| \leq \frac{1}{2} |x - x'|$.
Cette fonction est alors $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.7

L'application $\Phi\colon C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, où

$$\forall\, g \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad \Phi(g) := 1 + \tfrac{g(2)}{3}.$$

est-elle contractante ?

Exemple 1.7

L'application $\Phi\colon C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, où

$$\forall\, g \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad \Phi(g) := 1 + \tfrac{g(2)}{3}.$$

est-elle contractante ?

Oui, en effet, $\forall g, \tilde{h} \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a

$$|\Phi(g) - \Phi(h)| = |1 + \tfrac{g(2)}{3} - 1 - \tfrac{h(2)}{3}| = \tfrac{1}{3}|g(2) - h(2)| \leq \tfrac{1}{3}\|g - h\|_\infty.$$

Donc, Φ est une application $\frac{1}{3}$-lipschitzienne.

Definition 7

Si $f : X \to X$, un **point fixe** de f est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Definition 7

Si $f : X \to X$, un **point fixe** de f est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Théorème 1.9 (du point fixe de Picard)

Soient (X, d) *un espace métrique* **complet** *et* $f : (X, d) \to (X, d)$ **contractante**. *Alors :*

1. f *possède exactement un point fixe* a *;*
2. *pour tout* $x_0 \in X$*, la suite* (x_n)*, où*

$$x_n := \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n \text{ fois}}(x_0),$$

   converge vers a.

Definition 7

Si $f : X \to X$, un **point fixe** de f est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Théorème 1.9 (du point fixe de Picard)

Soient (X, d) un espace métrique **complet** *et $f : (X, d) \to (X, d)$* **contractante**. *Alors :*

1. *f possède exactement un point fixe a ;*
2. *pour tout $x_0 \in X$, la suite (x_n), où*

$$x_n := \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n \text{ fois}}(x_0),$$

converge vers a.

Donc :

$$x_1 = f(x_0), \qquad x_2 = f(f(x_0)), \qquad x_3 = f(f(f(x_0))), \qquad \text{etc.}$$

Dém.

Dém.

1. Soit $0 < k < 1$ tel que f soit k-lipschitzienne. Montrons que f a au plus un point fixe : si, par l'absurde, a et b sont des points fixes et $a \neq b$, on aboutit à la contradiction $0 < d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a,b) < d(a,b)$.

   L'existence d'un point fixe a est une conséquence du point (2) : si la suite (x_n) converge et si a est tel que $x_n \to a$, alors $x_{n+1} = f(x_n) \to f(a)$ (puisque toute fonction lipschitzienne est continue), d'où $f(a) = a$.

2. On a, pour tout n, $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$ (par récurrence sur n). Par conséquent, si $m \geq n$, alors

   $$d(x_m, x_n) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) = Ck^n.$$

   Comme $Ck^n \to 0$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un n_0 tel que $Ck^n < \epsilon$ si $n \geq n_0$. Il s'ensuit que $d(x_m, x_n) < \epsilon$ si $m, n \geq n_0$. La suite (x_n) étant de Cauchy, elle converge vers un $a \in X$. De ce qui précède, a est l'unique point fixe de f.

$\square$

Exemple 1.8

Trouver le nombre des solutions réelles de l'équation

$$\cos x = x$$

Exemple 1.8

Trouver le nombre des solutions réelles de l'équation

$$\cos x = x$$

On a $\cos x = x \Rightarrow x \in [-1, 1]$.
On prend alors $X = [-1, 1]$. et on considère

$$f : X \to X, \qquad f(x) = \cos x.$$

L'espace X est complet (avec la distance usuelle), car fermé dans $\mathbb{R}$.

De plus, on a $|f'(x)| \leq \sin 1 < 1$, $x \in X$. Le théorème des accroissements finis implique $|f(x) - f(y)| \leq \sin 1 |x - y|$, $x, y \in X$.
Par le théorème des contractions, il existe un et un seul $a \in X$ tel que Il s'ensuit que l'équation $\cos a = a$.
Donc l'équation $\cos x = x$ possède exactement une solution $a \in X = [-1, 1]$ (et aucune solution réélle en dehors de X).

Exemple 1.8

Trouver le nombre des solutions réelles de l'équation

$$\cos x = x$$

On a $\cos x = x \ \Rightarrow x \in [-1, 1]$.
On prend alors $X = [-1, 1]$. et on considère

$$f : X \to X, \qquad f(x) = \cos x.$$

L'espace X est complet (avec la distance usuelle), car fermé dans $\mathbb{R}$.

De plus, on a $|f'(x)| \leq \sin 1 < 1$, $x \in X$. Le théorème des accroissements finis implique $|f(x) - f(y)| \leq \sin 1 |x - y|$, $x, y \in X$.
Par le théorème des contractions, il existe un et un seul $a \in X$ tel que Il s'ensuit que l'équation $\cos a = a$.
Donc l'équation $\cos x = x$ possède exactement une solution $a \in X = [-1, 1]$ (et aucune solution réélle en dehors de X).

Le théorème de contraction ne permet pas de calculer a, mais fournit un algorithme pour l'approcher : en effet si on prend par exemple $x_0 = 0$, on définit

$$x_1 = \cos x_0 = 1, \qquad x_2 = \cos 1, \qquad x_3 = \cos(\cos(1)), \qquad \ldots$$

Et on trouve $x_n \to a$, avec l'estimation $|x_n - a| \leq \frac{(\sin 1)^n}{1 - \sin 1}$.

Les équations différentielles sont les équations dont l'inconnue est une fonction $u\colon I \to \mathbb{R}$ (avec I intervalle de $\mathbb{R}$)

$$t \mapsto u(t),$$

qu'il faut déterminer à partir de relations sur ses dérivées. Le cas le plus simple est celui des équations de la forme

$$u'(t) = f(t) \qquad (f \text{ donnée, } \; u \text{ à déterminer}),$$

dont les solutions, sur un intervalle $I = [a, b]$, sont les primitives de la fonction f, c'est-à-dire les fonctions $u(t) = \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + c$, où c est une constante arbitraire.
Dans toutes les sciences on a affaire à des problèmes qui peuvent se modéliser par des équations différentielles.

Exemple 2.1 (Désintégration du neutron)

Les neutrons libres sont des particules instables. Soit p la probabilité qu'un neutron se désintègre en une seconde. On souhaite calculer $N(t)$, le nombre de neutrons libres présents à l'instant t dans un matériau radioactif.

Le nombre de neutrons qui se désintègrent dans l'intervalle de temps $[t, t+h]$ est

$$N(t) - N(t+h) = p\,h\,N(t).$$

Si on divise par h et on prend $h \to 0$ on trouve

$$N'(t) = -pN(t).$$

Exemple 2.1 (Désintégration du neutron)

Les neutrons libres sont des particules instables. Soit p la probabilité qu'un neutron se désintègre en une seconde. On souhaite calculer $N(t)$, le nombre de neutrons libres présents à l'instant t dans un matériau radioactif.

Le nombre de neutrons qui se désintègrent dans l'intervalle de temps $[t, t+h]$ est

$$N(t) - N(t+h) = p\,h\,N(t).$$

Si on divise par h et on prend $h \to 0$ on trouve

$$N'(t) = -pN(t).$$

Divisons par $N(t)$ (on verra plus loin que pour ce type d'équations ceci est légitime, c'est à dire que $N(t) \neq 0$). On trouve $N'(t)/N(t) = -p$ et, en passant aux primitives, $\ln(N(t)) = -pt + c$. Ou encore,

$$N(t) = Ae^{-pt},$$

où $A = e^c = N(0)$. Si on connait $N(0)$ (le nombre de neutrons à l'instant initial), par cette formule on peut alors prédire le nombre de neutrons présents à aux instants t successifs.

Exemple 2.2 (Un problème géométrique)

Trouver l'équation de la courbe dans le quadrant $x > 0$ et $y > 0$, passant par le point $P(3;4)$ et dont la pente de la droite tangente en tout point (x, y) est donnée par y/x.

Exemple 2.2 (Un problème géométrique)

Trouver l'équation de la courbe dans le quadrant $x > 0$ et $y > 0$, passant par le point $P(3;4)$ et dont la pente de la droite tangente en tout point (x, y) est donnée par y/x.

Solution. Soit u la fonction à déterminer. Il s'agit de résoudre l'équation différentielle

$$u'(x) = u(x)/x, \qquad \text{avec } x > 0 \text{ et } u(x) > 0.$$

Exemple 2.2 (Un problème géométrique)

Trouver l'équation de la courbe dans le quadrant $x > 0$ et $y > 0$, passant par le point $P(3;4)$ et dont la pente de la droite tangente en tout point (x,y) est donnée par y/x.

Solution. Soit u la fonction à déterminer. Il s'agit de résoudre l'équation différentielle

$$u'(x) = u(x)/x, \qquad \text{avec } x > 0 \text{ et } u(x) > 0.$$

On réécrit l'équation sous la forme $u'(x)/u(x) = 1/x$. Ensuite on passe aux primitives terme-à-terme : $\ln(u(x)) = \ln(x) + c$, où c est une constante arbitraire. Passons aux exponentiels : $u(x) = e^{\ln x + c} = Ax$, où $A = e^c$. Imposons la condition de passage par le point $P(3;4)$: il faut que $4 = u(3) = 3A$, ce qui permet de calculer A.

Donc la courbe cherchée est le graphe de la fonction

$$u(x) = \frac{4}{3}x, \qquad x > 0$$

Les équations différentielles d'ordre supérieur sont très fréquentes dans les applications. Par exemple, en mécanique newtonienne :

- Soit $u(t)$ la **position** d'un point materiel qui se déplace le long d'une droite ($u(t)$ exprime alors l'abscisse du point sur cette droite).
- La **vitesse** du point à l'instant t est $u'(t)$
- l'**acceleration** est $u''(t)$.

Supposons qu'une force f agisse sur le point. En général, f dépend de t, de la position $u(t)$ et de sa vitesse $u'(t)$. La loi Newton $f = ma$ se traduit alors par l'équation différentielle

$$u''(t) = \frac{1}{m} f(t, u(t), u'(t)).$$

Les équations différentielles d'ordre supérieur sont très fréquentes dans les applications. Par exemple, en mécanique newtonienne :

- Soit $u(t)$ la **position** d'un point materiel qui se déplace le long d'une droite ($u(t)$ exprime alors l'abscisse du point sur cette droite).
- La **vitesse** du point à l'instant t est $u'(t)$
- l'**acceleration** est $u''(t)$.

Supposons qu'une force f agisse sur le point. En général, f dépend de t, de la position $u(t)$ et de sa vitesse $u'(t)$. La loi Newton $f = ma$ se traduit alors par l'équation différentielle

$$u''(t) = \frac{1}{m} f(t, u(t), u'(t)).$$

Exemple 2.3

On suspend une masse m à un ressort.

- L'élongation/compression ℓ du ressort par rapport à l'équilibre est $\pm u(t)$.
- D'après la loi de Hooke, la force de rappel du ressort vaut $\kappa\ell$, où κ est une constante que l'on calcule expérimentalement.

L'équation différentielle associée à ce problème est

$$u''(t) = -\frac{\kappa}{m} u(t).$$

Nous verrons que la "solution générale" de cette équation différentielle est

$$u(t) = A\cos(\sqrt{\kappa/m}\, t) + B\sin(\sqrt{\kappa/m}\, t), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Nous allons étudier notamment les équations différentielles de la forme

$$u'(t) = f(t, u(t)), \qquad \text{(on écrira souvent, en abrégé, } u' = f(t, u)\text{)}$$

où :

- l'inconnue est une fonction dérivable $u\colon I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$)
- la fonction f de deux variables est donnée.

Une telle équation différentielle est dite :

- scalaire (puisque l'inconnue u est à valeurs dans $\mathbb{R}$),
- du premier ordre (parce qu'elle ne contient que des dérivées d'ordre 1)
- en forme normale (parce que l'on peut isoler la dérivée à gauche de l'égalité).

Les exemple 2.1 et 2.2 sont bien deux exemples d'équations du type $u' = f(t, u)$: dans le premier cas, la fonction f est donnée par $f(t, u) = -pu$, dans le second cas, on a $f(t, u) = u/t$.

Une équations différentielle possède en général une infinité de solutions. Souvent, on cherche parmi les solutions celle vérifiant des conditions supplémentaires.

Definition 8 (Solution locale d'un problème de Cauchy)

Soit f une fonction définie au voisinage de $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$. On dit que le *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{P}$$

admet une *solution locale* s'il existe une fonction dérivable u définie sur un voisinage de t_0, telle que $u(t_0) = u_0$ et, pour tout t dans ce voisinage, on a

$$u'(t) = f(t, u(t)).$$

L'existence d'une solution du problème de Cauchy est garantie dès que f est continue. En effet, nous avons le théorème suivant, que nous admettons :

Definition 8 (Solution locale d'un problème de Cauchy)

Soit f une fonction définie au voisinage de $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$. On dit que le *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{P}$$

admet une *solution locale* s'il existe une fonction dérivable u définie sur un voisinage de t_0, telle que $u(t_0) = u_0$ et, pour tout t dans ce voisinage, on a

$$u'(t) = f(t, u(t)).$$

L'existence d'une solution du problème de Cauchy est garantie dès que f est continue. En effet, nous avons le théorème suivant, que nous admettons :

Théorème 2.1 (Peano (dém. hors programme))

Soit f une fonction continue au voisinage de (t_0, u_0). Alors le problème de Cauchy (P) *possède au moins une solution locale.*

Exemple 2.4

Le théorème de Peano assure que les deux problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sin(t + u^3) \\ u(2) = 3. \end{cases} \qquad \text{(P)} \qquad\qquad \begin{cases} u' = -2tu^2 \\ u(0) = -1. \end{cases} \qquad \text{(P')}$$

possèdent au moins une solution locale.

- dans le cas (P) on ne sait pas la calculer explicitement.
- Dans le cas (P') on voit que la fonction $u(t) = \frac{1}{t^2-1}$, définie su $]-1,1[$, convient.

Exemple 2.4

Le théorème de Peano assure que les deux problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sin(t + u^3) \\ u(2) = 3. \end{cases} \qquad \text{(P)} \qquad\qquad \begin{cases} u' = -2tu^2 \\ u(0) = -1. \end{cases} \qquad \text{(P')}$$

possèdent au moins une solution locale.

- dans le cas (P) on ne sait pas la calculer explicitement.
- Dans le cas (P') on voit que la fonction $u(t) = \frac{1}{t^2-1}$, définie su $]-1,1[$, convient.

Exemple 2.5

Soit $f(t,u) = 1$ si $t \geq 0$ et 0 si $t < 0$. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(0) = 1. \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

La fonction f étant discontinue au voisinage du point $(0,1)$, le théorème de Peano ne s'applique pas. On peut vérifie facilement que ce problème n'a pas de solution locale.

Il est utile de ramener l'étude d'un problème de Cauchy à une équation intégrale :

Proposition 2.2

Soit $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ *et* f *une fonction continue dans un voisinage de* (t_0, u_0), *à valeurs réelles. Une fonction* $u(t)$ *est une solution de classe* C^1 *du problème de Cauchy* (P) *dans un voisinage de* t_0 *si et seulement si, dans ce voisinage,* u *est une solution continue de l'équation intégrale*

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,\mathrm{d}s. \tag{1}$$

Théorème 2.3 (Cauchy-Lipschitz)

Soit $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$. *Considérons le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{P}$$

Supposons que :

a) f *est continue dans un voisinage* V *de* (t_0, u_0)

b) $\exists\, L > 0$ *telle que, pour tout* $(s,v) \in V$ *et tout* $(s,w) \in V$ *on a*

$$|f(s,v) - f(s,w)| \le L|v - w|. \tag{*}$$

Alors le problème (P) possède une unique solution locale.

Plus précisément :

Théorème 2.3 (Cauchy-Lipschitz)

Soit $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$. *Considérons le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{P}$$

Supposons que :

a) f *est continue dans un voisinage* V *de* (t_0, u_0)

b) $\exists\, L > 0$ *telle que, pour tout* $(s,v) \in V$ *et tout* $(s,w) \in V$ *on a*

$$|f(s,v) - f(s,w)| \le L|v - w|. \tag{*}$$

Alors le problème (P) possède une unique solution locale.

Plus précisément :

- *S'il existent* $r_1, r_2 > 0$ *tels*

$$I \times J \subset V, \qquad I = [t_0 - r_1, t_0 + r_1], \quad J = [u_0 - r_2, u_0 + r_2]$$

- *et si l'inégalité (*) est vérifiée pour tout* $s \in I$ *et pour tous* $v, w \in J$,

alors il existe une et une seule solution u, *de classe* C^1, *définie au moins sur l'intervalle* $I_0 = [t_0 - r_0, t_0 + r_0]$, *où :*

$$0 < r_0 < \min\{r_1, r_2/M, 1/L\}, \qquad \text{avec } M = \max_{I \times J} |f|.$$

Démonstration.
Introduisons l'espace

$$X = \{u \colon I_0 \to \mathbb{R}, : u \text{ continue et } \|u - u_0\|_\infty \leq r_2\}.$$

L'idée de la démonstration est la suivante :

u est solution du problème de Cauchy **si et seulement si**
u est un point fixe d'une fonction $\Phi \colon X \to X$ à déterminer.

L'existence et l'unicité de la solution découlera du théorème des contractions

Observons que X est une partie fermée de $C(I_0, \mathbb{R})$. Cet espace étant complet, X est lui même un espace métrique complet.
Considérons l'application $\Phi \colon X \to X$, définie de la manière suivante :

Démonstration.
Introduisons l'espace

$$X = \{u\colon I_0 \to \mathbb{R}, : u \text{ continue et } \|u - u_0\|_\infty \leq r_2\}.$$

L'idée de la démonstration est la suivante :

u est solution du problème de Cauchy **si et seulement si**
u est un point fixe d'une fonction $\Phi\colon X \to X$ à déterminer.

L'existence et l'unicité de la solution découlera du théorème des contractions

Observons que X est une partie fermée de $C(I_0, \mathbb{R})$. Cet espace étant complet, X est lui même un espace métrique complet.
Considérons l'application $\Phi\colon X \to X$, définie de la manière suivante :
si $v \in X$ (donc $v = v(t)$ est une fonction continue de la variable t), par définition la fonction $\Phi(v) \in X$ est la fonction $\Phi(v)\colon I_0 \to \mathbb{R}$ qui à t associe

$$\Phi(v)(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\,\mathrm{d}s.$$

Vérifions que :

- On a bien $\Phi(v) \in X$ (donc Φ bien définie)
- Φ est contractante,

Démonstration (suite).
On a

$$\Phi(v)(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\,\mathrm{d}s.$$

Tout d'abord, $t \mapsto \Phi(v)(t)$ est bien continue. De plus, pour tout $t \in I_0$,

$$\begin{aligned}|\Phi(v)(t) - u_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\,\mathrm{d}s\right| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, v(s))|\,\mathrm{d}s \\ &\leq Mr_0 < r_2.\end{aligned}$$

En passant au sup sur $t \in I_0$ on trouve

$$\|\Phi(v) - u_0\|_\infty \leq r_2.$$

Autrement dit, pour tout $v \in X$, on a bien

$$\Phi(v) \in X,$$

donc $\Phi \colon X \to X$ comme initialement affirmé.

Démonstration (suite). Démontrons maintenant que $\Phi\colon X \to X$ est une contraction. On a (rappel) :

$$\Phi(v)(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\,\mathrm{d}s.$$

Soient $v, w \in X$ et estimons $\|\Phi(v) - \Phi(w)\|_\infty = \sup_{t \in I_0} |\Phi(v)(t) - \Phi(w)(t)|$. On a

$$\begin{aligned}
|\Phi(v)(t) - \Phi(w)(t)| &= \Big|u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\,\mathrm{d}s - u_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, w(s))\,\mathrm{d}s\Big| \\
&= \Big|\int_{t_0}^{t} \Big(f(s, v(s)) - f(s, w(s))\Big)\,\mathrm{d}s\Big| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \Big|f(s, v(s)) - f(s, w(s))\Big|\,\mathrm{d}s \\
&\leq L \int_{t_0}^{t} \Big|v(s) - w(s)\Big|\,\mathrm{d}s \\
&\leq L \int_{t_0}^{t} \|v - w\|_\infty\,\mathrm{d}s \\
&\leq L\, r_0 \|v - w\|_\infty.
\end{aligned}$$

Si on passe au $\sup_{t \in I_0}$ dans ces inégalités on trouve

$$\|\Phi(v) - \Phi(w)\|_\infty \leq L r_0 \|v - w\|_\infty.$$

Mais nos hypothèses impliquent $L r_0 < 1$, ce qui assure que Φ est bien une application contractante dans X.

Démonstration (fin).
D'après le théorème de point fixe de Picard (théorème 1.9), on en déduit qu'il existe une et une seule fonction $u \in X$ telle que

$$u = \Phi(u).$$

Cette égalité de point fixe signifie que

$$u(t) = \Phi(u)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) \, \mathrm{d}s., \qquad \text{pour tout } t \in I_0.$$

Mais cette équation n'est rien d'autre que l'équation intégrale (1), comme on le voit d'après la définition de Φ.
Or, on sait déjà (proposition 2.2) que l'équation intégrale est équivalente au problème de Cauchy. En conclusion, le problème de Cauchy possède une et une seule solution dans l'intervalle I_0.

$\square$

Comment vérifier la condition (b) du théorème de Cauchy-Lipschitz ?

Comment vérifier la condition (b) du théorème de Cauchy-Lipschitz ?

Corollaire 2.4

Soit f est une fonction continue dans un voisinage de (t_0, u_0), et telle que $\frac{\partial f}{\partial u}$ est continue au au voisinage de (t_0, u_0). Alors le problème de Cauchy (P) possède une unique solution locale.
En particulier : si f est de classe C^1 au voisinage de (t_0, u_0) le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique.

Dém.

Comment vérifier la condition (b) du théorème de Cauchy-Lipschitz ?

Corollaire 2.4

Soit f est une fonction continue dans un voisinage de (t_0, u_0), et telle que $\frac{\partial f}{\partial u}$ est continue au au voisinage de (t_0, u_0). Alors le problème de Cauchy (P) *possède une unique solution locale.*
En particulier : si f est de classe C^1 au voisinage de (t_0, u_0) le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique.

Dém.

En effet, par le théorème de accroissements finis, appliqué à la fonction $u \mapsto f(t,u)$, il existe ξ, compris entre v et w tel que

$$f(t,v) - f(t,w) = \frac{\partial f}{\partial u}(t,\xi)(v-w).$$

Mais comme $\frac{\partial f}{\partial u}$ est continue, nous pouvons poser $L = \max_{I\times J} |\frac{\partial f}{\partial u}|$, et on trouve

$$\forall\, t \in I,\ v, w \in J, \qquad |f(t,v) - f(t,w)| \le L|v-w|.$$

La condition (b) du théorème de Cauchy–Lipschitz est alors satisfaite. $\square$

Exemple 2.6

Pour quelles valeurs de $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = te^u - \ln u \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

possède-t-il une unique solution solution locale ?

Exemple 2.6

Pour quelles valeurs de $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = te^u - \ln u \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

possède-t-il une unique solution solution locale ?
Réponse : la fonction $f(t,u) = te^u - \ln u$ est définie et continue pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour $u > 0$. De plus, $\frac{\partial f}{\partial u} = te^u - 1/u$ et cette fonction est continue pour $t \in \mathbb{R}$ et $u > 0$. D'après le corollaire, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $u_0 > 0$, le problème de Cauchy possède une unique solution locale. D'autre part, pour $u_0 \leq 0$, il n'y a pas de solution locale (parce que le terme à droite dans l'équation différentielle n'a pas de sens pour $t = t_0$).

Exemple 2.7

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = 3u^{2/3} \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

- Le théorème de Peano s'applique-t-il ?

Exemple 2.7

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = 3u^{2/3} \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

- Le théorème de Peano s'applique-t-il ?
  Oui ! En effet l'application f, $(t,u) \mapsto f(t,u) = 3u^{3/2}$ est bien continue au voisinage de $(0,0)$.
- Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il ?

Exemple 2.7

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = 3u^{2/3} \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

- Le théorème de Peano s'applique-t-il ?
  Oui ! En effet l'application f, $(t,u) \mapsto f(t,u) = 3u^{3/2}$ est bien continue au voisinage de $(0,0)$.
- Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il ?
  Non ! f ne vérifie pas la condition (b) du théorème de Cauchy–Lipschitz. Noter que $\frac{\partial f}{\partial u}(t,u) = 2u^{-1/3}$ qui est discontinue en $u = 0$: le corollaire ne s'applique pas non plus.

Exemple 2.7

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = 3u^{2/3} \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

- Le théorème de Peano s'applique-t-il ?
  Oui ! En effet l'application f, $(t,u) \mapsto f(t,u) = 3u^{3/2}$ est bien continue au voisinage de $(0,0)$.
- Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il ?
  Non ! f ne vérifie pas la condition (b) du théorème de Cauchy–Lipschitz. Noter que $\frac{\partial f}{\partial u}(t,u) = 2u^{-1/3}$ qui est discontinue en $u = 0$: le corollaire ne s'applique pas non plus.

Ce problème de Cauchy possède deux solutions locales distinctes :

$$u(t) = 0 \;\text{ et }\; u(t) = t^3.$$

1. Espaces métriques complets
   - Quelques rappels sur les espaces métriques
   - Suites de Cauchy et espaces complets
   - Relation entre espaces complets et fermés
   - L'espace des fonctions continues et bornées
   - Contractions et le théorème du point fixe

2. Équations différentielles
   - Motivations et premiers exemples
   - Le problème de Cauchy
   - **Prolongement des solutions**
   - Systèmes différentiels
   - Équations différentielles linéaires
   - Équations différentielles linéaires à coefficients constants
   - Inégalités de Gronwall

Dans toute cette section nous supposons que f vérifie en tout point des conditions comme dans le corollaire précédent. Plus précisément, nous supposons que [1] :

a') $f = f(t, u)$ est continue dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

b') $\frac{\partial f}{\partial u}$ est continue dans U.

Dans ce cas, les graphes de deux solutions d'une même équation différentielle ne peuvent pas s'intersecter. En effet, nous avons le théorème suivant :

1. La condition b') pourrait être affaiblie en demandant seulement à f d'être, localement, lipschitzienne en u. Plus précisément, il s'agit de supposer qu'en tout point (t_0, u_0) de U, il existe une constante $L > 0$ (pouvant dépendre de (t_0, u_0) et un voisinage $V \subset U$ de (t_0, u_0) tel que,

$$|f(s, v) - f(s, w)| \leq L|v - w|$$

pour tout (s, v) et (s, w) dans V.

Proposition 2.5

Supposons que f vérifie les hypothèses (a') et (b'). Si v et w sont deux solutions de l'equation différentielle $u' = f(t,u)$ définies sur un même intervalle $]a,b[$, qui coïncident en un point $t_0 \in]a,b[$, alors v et w coïncident sur tout l'intervalle $]a,b[$.

Dém.

Proposition 2.5

Supposons que f vérifie les hypothèses (a') et (b'). Si v et w sont deux solutions de l'equation différentielle $u' = f(t, u)$ définies sur un même intervalle $]a, b[$, qui coïncident en un point $t_0 \in]a, b[$, alors v et w coïncident sur tout l'intervalle $]a, b[$.

Dém.

Par contradiction, supposons que $v \not\equiv w$ sur $[t_0, b[$. Posons

$$t_1 = \inf\{t \geq t_0 \colon v(t) \neq w(t)\}.$$

On a

$$v(t_1) = w(t_1)$$

par la continuité de v et w.
Mais en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz au problème de Cauchy avec la condition initiale centrée en t_1, nous voyons qu'il existe $r_0 > 0$ tel que les deux solutions v et w restent égales pour $t \leq t_1 + r_0$. Cela contredit la définition de t_1.
Donc v et w coïncident sur $[t_0, b[$.

De la même manière on prouve que les solutions coïncident sur $]a, t_0[$. $\square$

Definition 9 (prolongement, solutions maximales, courbes intégrales)

- On dit qu'une solution $v\colon I \to \mathbb{R}$ d'une équation différentielle $u' = f(t,u)$, **prolonge** une autre solution $w\colon J \to \mathbb{R}$ (où I et J sont deux intervalles ouverts) de la même équation si :

$$I \supset J \quad \text{et } v(t) = w(t) \text{ pour tout } t \in J.$$

- On dit que v est une **solution maximale** si elle n'admet pas d'autres prolongements possibles autre que par la solution v elle même.
- Le graphe d'une solution maximale d'une équation différentielle s'appelle **courbe intégrale**.

Definition 9 (prolongement, solutions maximales, courbes intégrales)

- On dit qu'une solution $v\colon I \to \mathbb{R}$ d'une équation différentielle $u' = f(t,u)$, **prolonge** une autre solution $w\colon J \to \mathbb{R}$ (où I et J sont deux intervalles ouverts) de la même équation si :

$$I \supset J \quad \text{et } v(t) = w(t) \text{ pour tout } t \in J.$$

- On dit que v est une **solution maximale** si elle n'admet pas d'autres prolongements possibles autre que par la solution v elle même.
- Le graphe d'une solution maximale d'une équation différentielle s'appelle **courbe intégrale**.

Remarque 2.1

La proposition précédente implique que deux courbes intégrales ne peuvent pas s'intersecter.

Exemple 2.8

Trouvons les courbes intégrales de l'équation différentielle $u' = -2tu$:

Exemple 2.8

Trouvons les courbes intégrales de l'équation différentielle $u' = -2tu$:
ce sont les graphes des fonctions $t \mapsto Ce^{-t^2}$, définies pour tout $t \in \mathbb{R}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Problème. Étant donnée une équation différentielle, et une solution $w \colon I \to \mathbb{R}$ de celle-ci, quand est-ce w peut être prolongée ?

Proposition 2.6

Soit l'équation différentielle

$$u' = f(t, u)$$

où f vérifie (a') et (b'). Supposons que $v\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ soit une solution.
S'il existe la limite $\lim_{t\to b} v(t) = u_0$, et si $(b, u_0) \in U$, alors la solution v se prolonge au delà de b.

Proposition 2.6

Soit l'équation différentielle

$$u' = f(t,u)$$

où f vérifie (a') et (b'). Supposons que $v\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ soit une solution.
S'il existe la limite $\lim_{t\to b} v(t) = u_0$, et si $(b,u_0)\in U$, alors la solution v se prolonge au delà de b.

Dém.

En effet, en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz :

$$\exists\,\delta>0,\quad \exists\, w\colon [b,b+\delta[\to \mathbb{R} \text{ solution du pb de Cauchy } \begin{cases} u'(t) = f(t,u(t)) \\ u(b) = u_0 \end{cases} .$$

Posons

$$\tilde v(t) = \begin{cases} v(t) & \text{si } t\in]a,b[\\ w(t) & \text{si } t\in [b,b+\delta[. \end{cases}$$

Par construction, $\tilde v$ est continue, dérivable sur $]a,b[$ et sur $]b,b+\delta[$ et $\lim_{t\to b}\tilde v'(t) = f(b,u_0)$.
Ces conditions impliquent que $\tilde v$ est dérivable en b, avec $\tilde v'(b) = \lim_{t\to b} v'(t)$.
En effet, si $b<t<b+\delta$, d'après le théorème des accroissements finies, il existe $\xi\in(b,t)$ tel que $w(t)-w(b) = w'(\xi)(t-b)$. En divisant par $t-b$, on voit que la limite $t\to b$ existe et vaut $\lim_{\xi\to b} w'(\xi)$. Autrement dit w est dérivable à droite en b. De la même manière w et dérivable à gauche en b et les valeurs de dérivées à droite et à gauche sont les mêmes. $\square$

De même, s'il existe la limite $\lim_{t\to a} u(t) = u_0$, et si $(a,u_0)\in U$, alors la solution $w(t)$ se prolonge au delà de a.

Le cas des fonctions $f\colon U \to \mathbb{R}$, avec $U =]a,b[\times\mathbb{R}$.

Definition 10

Soit l'équation différentielle $u' = f(t,u)$, avec f supposée vérifier (a') et (b') et définie sur $]a,b[\times\mathbb{R}$ (donc $f(t,u)$ est définie pour tout $u \in \mathbb{R}$).
Soit v une solution maximale. Si v est définie sur tout l'intervalle $]a,b[$ on dit que v est une **solution globale**.

Dans le cas contraire on peut démontrer que les solutions possèdent une asymptote verticale, on dit alors que la solution *explose* à l'infini.

Le cas des fonctions $f\colon U \to \mathbb{R}$, avec $U =]a,b[\times\mathbb{R}$.

Definition 10

Soit l'équation différentielle $u' = f(t,u)$, avec f supposée vérifier (a') et (b') et définie sur $]a,b[\times\mathbb{R}$ (donc $f(t,u)$ est définie pour tout $u \in \mathbb{R}$).
Soit v une solution maximale. Si v est définie sur tout l'intervalle $]a,b[$ on dit que v est une **solution globale**.

Dans le cas contraire on peut démontrer que les solutions possèdent une asymptote verticale, on dit alors que la solution *explose* à l'infini.

Exemple 2.9

Soit l'équation différentielle

$$u' = \sqrt{4-t^2}\,\sin(u(t)).$$

Ici $f\colon [-2,2]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t,u) = \sqrt{4-t^2}\,\sin u$.

Les **solutions globales** sont les solutions définies sur l'intervalle le plus grand possible : ici $]-2,2[$.

Exemple 2.10

Considérons l'équation différentielle :

$$u' = u^2$$

Exemple 2.10

Considérons l'équation différentielle :

$$u' = u^2$$

Ici, $f(t,u) = u^2$, qui est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- La solution nulle $u(t) = 0$ est une solution maximale qui est aussi globale (puisque définie pour tout tout $t \in \mathbb{R}$).
- La solution $u_c(t) = -\frac{1}{t+c}$ (avec $c \in \mathbb{R}$) définie sur l'intervalle $]-c, +\infty[$, est une solution maximale, non globale.

Théorème 2.7 (Un résultat d'existence globale)

Soit f une fonction vérifiant (a') et (b'), avec $U =]a, b[\times \mathbb{R}$. Supposons que pour tout intervalle compact $K \subset]a, b[$ il existe deux constantes A et B (éventuellement dépendentes de K, telles que, pour tout $(t, u) \in K \times \mathbb{R}$ on a

$$|f(t, u)| \leq A + B|u|.$$

Alors toute solution de l'équation différentielle $u' = f(t, u)$ se prolonge à une solution "globale", c'est à dire, définie sur tout l'intervalle $]a, b[$.

Dém.

Admis. $\square$

Exemple 2.11

Toutes les solutions de l'équation différentielle

$$u' = (1 + 2t + 3tu)\cos(t^2 + u^2)$$

sont globales (définies pout tout $\mathbb{R}$).

Exemple 2.11

Toutes les solutions de l'équation différentielle

$$u' = (1 + 2t + 3tu)\cos(t^2 + u^2)$$

sont globales (définies pout tout $\mathbb{R}$).

En effet, appliquons le théorème précédent avec $]a, b[= \mathbb{R}$. D'abord,

$$f(t, u) = (1 + 2t + 3tu)\cos(t^2 + u^2)$$

est clairement de classe C^1 dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: cela suffit pour garantir la validité des hypothèses (a') et (b').
De plus pour tout intervalle $K \subset \mathbb{R}$, il existe $c > 0$ tel que $K \subset [-c, c]$.
Mais

$$|f(t, u)| \leq 1 + |2t| + |3tu| \leq 1 + 2c + 3c|u|.$$

L'inégalité du théorème précédent est satisfaite avec $A = 1 + 2c$ et $B = 3c$.

Soient f_1, f_2,..., f_n des fonctions de $n+1$ variables réelles, t, u_1, $\dots u_n$, définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^{n+1}$.
Un **système d'équations différentielles** (d'ordre 1 et en forme normale) est un système de la forme

$$\begin{cases} u_1' = f_1(t, u_1, \dots u_n) \\ \quad \vdots \\ u_n' = f_n(t, u_1, \dots, u_n). \end{cases} \tag{S}$$

Les inconnues sont les fonctions $u_1(t)$,... $u_n(t)$.

Exemple 2.12

Soient f_1, f_2,..., f_n des fonctions de $n+1$ variables réelles, t, u_1, ... u_n, définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Un **système d'équations différentielles** (d'ordre 1 et en forme normale) est un système de la forme

$$\begin{cases} u_1' = f_1(t, u_1, \dots u_n) \\ \quad \vdots \\ u_n' = f_n(t, u_1, \dots, u_n). \end{cases} \tag{S}$$

Les inconnues sont les fonctions $u_1(t)$,... $u_n(t)$.

Exemple 2.12

$$\begin{cases} u' = t \exp(uv) \\ v' = t + u + v \end{cases}$$

est un système différentiel (que l'on ne sait pas résoudre explicitement) d'inconnues les fonctions $u = u(t)$ et $v = v(t)$.

Soit $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $f_1, \dots f_n$ des fonctions définies au voisinage de ce point.

Definition 11 (problème de Cauchy pour les systèmes différentiels)

On dit que les n fonctions $u_1, \dots u_n$, définies sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ sont une solution du problème de Cauchy (P) si, pour tout $t \in I$,

- $\forall\, t \in I$ le point $(t, u_1(t), \dots, u_n(t))$ appartient à U et
- $$\forall t \in I \begin{cases} u_1'(t) = f_1(t, u_1(t), \dots u_n(t)) \\ \qquad \dots \\ u_n'(t) = f_n(t, u_1, (t) \dots, u_n(t)) \\ u_1(t_0) = u_{0,1} \\ \vdots \\ u_n(t_0) = u_{0,n}. \end{cases} \tag{P}$$

Dans ce cas, il convient de considérer les fonctions vectorielles $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $f = (f_1, \dots f_n)$. Par définition, la dérivée d'une fonction vectorielle se fait composante par composante : $u' = (u_1', \dots, u_n')$. Donc le système (S) équivaut à la seule équation *vectorielle*

$$u' = f(t, u).$$

Le problème de Cauchy pour le systèmes différentiels du premier-ordre, ou problème de Cauchy vectoriel, consiste alors à résoudre

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{C}$$

Ici $u_0 = (u_{0,1}, \dots u_{0,n}) \in \mathbb{R}^n$ est donné, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ est une fonction définie dans un voisinage de U de $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^{1+n}$, et l'inconnue est la fonction vectorielle $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz reste valable dans le cas vectoriel. On l'énonce sous une forme un peu moins précise que dans le cas des équations scalaire :

Théorème 2.8 (de Cauchy-Lipschitz pour les systèmes différentiels)

Soit $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^{1+n}$ et f une fonction continue au voisinage U de (t_0, u_0) et telle qu'il existe une constante $L > 0$ telle que, pour tout (t, v) et tout (t, w) dans U on a

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L\|v - w\|,$$

où on a noté par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ (mais on peut prendre aussi la norme du maximum des composantes). Alors il existe un intervalle ouvert I_0, contenant t_0, tel que le problème de Cauchy (C) possède une unique solution $u = (u_1, \ldots, u_n)$ définie dans I_0.

Remarque 2.2

Si f est de classe C^1, sur U alors l'hypothèse ci-dessus est automatiquement satisfaite. En fait, il suffit que f soit continue dans U et qu'elle soit de classe C^1 dans U en les variables $u_1, \ldots, u_n$.

Cette affirmation se justifie en appliquant l'inégalité des accroissement finis à la fonction vectorielle de n variables $u \mapsto f(t, u)$.

Exemple 2.13

La fonction $f(t, u_1, u_2) = (|t| + u_1 + e^{u_2}, t - u_2)$ vérifie bien les hypothèses du théorème de Cauchy Lipschitz au voisinage de tout point $(t_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$. Donc le problème de Cauchy $u' = f(t, u)$, avec condition initiale avec $u(t_0) = (u_1, u_2)$ possède une et une seule solution locale.

Soit maintenant que $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, avec

$$U =]a,b[\times \mathbb{R}^n$$

. et supposons

- f continue
- f de classe C^1, au moins par rapport au n dernières variables.

Théorème 2.9 (Existence globale pour le systèmes différentiels)

Soit f comme ci-dessus. Supposons de plus que f pour tout intervalle compact $K \subset]a,b[$ il existe deux constantes A et B (éventuellement dépendentes de K), telles que, pour tout $(t,u) \in K \times \mathbb{R}^n$ on a

$$\|f(t,u)\| \le A + B\|u\|.$$

Alors toute solution de l'équation différentielle $u' = f(t,u)$ se prolonge à une solution "globale", c'est à dire, définie sur tout l'intervalle $]a,b[$.

Démonstration admise.

En général, on peut réduire une équation d'ordre supérieur à un système du premier ordre. Voici un exemple de la démarche :

Exemple 2.14

Soit l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$u'' = f(t, u, u') \tag{*}$$

En général, on peut réduire une équation d'ordre supérieur à un système du premier ordre. Voici un exemple de la démarche :

Exemple 2.14

Soit l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$u'' = f(t, u, u') \tag{*}$$

Si u est solution de cette équation, on peut introduire la fonction vectorielle $U = (U_1, U_2) := (u, u')$. On a

$$\begin{cases} U_1' = U_2 \\ U_2' = f(t, U_1, U_2) \end{cases}$$

Introduisons la fonction vectorielle

$$F(t, U_1, U_2) = (U_2, f(t, U_1, U_2)).$$

On voit alors que U vérifie l'équation vectorielle du premier ordre

$$U' = F(t, U). \tag{**}$$

Exemple 2.15

Considérons l'équation scalaire d'ordre 3

$$u''' = 3t(u'')^2 + e^{u \sin t}.$$

Exemple 2.15

Considérons l'équation scalaire d'ordre 3

$$u''' = 3t(u'')^2 + e^{u \sin t}.$$

On introduit la fonction vectorielle $U = (U_1, U_2, U_3) := (u, u', u'')$. Avec ces notations on voit que l'équation donnée équivaut au système

$$\begin{cases} U_1' = U_2 \\ U_2' = U_3 \\ U_3' = 3tU_3^2 + e^{U_1 \sin t} \end{cases}$$

Ce système s'écrit sous forme vectorielle comme

$$U' = F(t, U).$$

Ici, la fonction vectorielle $F = (F_1, F_2, F_3)$ est une fonction des 4 variables t, U_1, U_2 et U_3. Ses composantes sont données par :

$$F_1(t, U_1, U_2, U_3) = U_2, \qquad F_2(t, U_1, U_2, U_3) = U_3 \quad \text{et} \quad F_3(t, U_1, U_2, U_3) = 3tU_3^2 + e^{U_1 \sin t}.$$

Definition 12 (eq. différentielle linéaire)

Soient $a_0(t)$, $a_1(t)$, $\ldots a_{k-1}(t)$ et $f(t)$ des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.
Une équation différentielle **linéaire** est une équation de la forme

$$u^{(k)} + a_{k-1}(t)u^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t). \tag{L}$$

Si le terme à droite est identiquement nul sur I, c'est à dire si $f \equiv 0$, alors équation linéaire est dite **homogène**.

Exemple 2.16

Definition 12 (eq. différentielle linéaire)

Soient $a_0(t)$, $a_1(t)$, $\ldots a_{k-1}(t)$ et $f(t)$ des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.
Une équation différentielle **linéaire** est une équation de la forme

$$u^{(k)} + a_{k-1}(t)u^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t). \tag{L}$$

Si le terme à droite est identiquement nul sur I, c'est à dire si $f \equiv 0$, alors équation linéaire est dite **homogène**.

Exemple 2.16

$$u'' + \sin(t)u' + \sqrt{2 - t^2}\, u = \exp(t)$$

est une équation **différentielle linéaire d'ordre 2, non homogène,** sur l'intervalle $I =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
Ici $a_1(t) = \sin t$ et $a_0(t) = \sqrt{2 - t^2}$.

Exemple 2.17

$$u'' + t\sin(u') + \sqrt{2 - t^2}u = \exp(t)$$

est une **équation différentielle d'ordre 2 non-linéaire**.

Soit une équation différentielle linéaire d'ordre k, comme dans la définition précédente. Posons

$$E(u) = u^{(k)} + a_{k-1}u^{(k-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u.$$

Autrement dit, $E(u)\colon I \to \mathbb{R}$ est l'application

$$t \overset{E(u)}{\mapsto} u^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)u^{(k-1)}(t) + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u(t).$$

L'équation différentielle s'écrit alors

$$E(u) = f. \tag{L}$$

Observons que l'application $u \mapsto E(u)$ est une application linéaire, au sens que, pour toute fonction u et v de classe C^k dans l'intervalle I, et pour tout scalaire λ et μ, on a

$$E(\lambda u + \mu v) = \lambda E(u) + \mu E(v).$$

Voici une conséquence :
si v et w sont deux solutions de (L), on a

$$E(v) = f, \quad \text{et} \quad E(w) = f,$$

donc

$$E(v - w) = 0.$$

Autrement dit : la différence de deux solutions d'une équation différentielle linéaire est la solution de l'équation différentielle *homogène* $E(u) = 0$.

Notons par :

- $\mathcal{V}_f$ l'ensemble de toutes les solutions de l'équation (L)
- $\mathcal{V}_0$ l'ensemble de toutes les solutions de l'équation différentielle homogène qui lui est associée. Soit $u \in \mathcal{V}_f$ (u est donc une solution particulière de l'équation différentielle (L)).

Observons que :

- Si $v \in \mathcal{V}_f$, alors $v - u \in \mathcal{V}_0$.
- si $v \in \mathcal{V}_l$, alors $u + v \in \mathcal{V}_f$.

Les deux affirmations précédentes se résument par l'égalité d'ensembles :

$$\mathcal{V}_f = u + \mathcal{V}_0.$$

On exprime cette égalité avec la terminologie suivante : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est donnée par une solution particulière plus la solution générale de l'équation homogène associée.

(Méthode de variation de la constante)

Équations d'ordre 1 et méthode de variation de la constante
Considérons l'équation linéaire d'ordre 1, sur un intervalle I.

$$u' + a(t)u = f(t). \tag{*}$$

L'équation homogène associée est

$$u' + a(t)u = 0. \tag{H}$$

(Méthode de variation de la constante)

Équations d'ordre 1 et méthode de variation de la constante
Considérons l'équation linéaire d'ordre 1, sur un intervalle I.

$$u' + a(t)u = f(t). \tag{*}$$

L'équation homogène associée est

$$u' + a(t)u = 0. \tag{H}$$

Soit $A(t)$ une primitive sur I de $a(t)$. En multipliant (H) par $e^{A(t)}$ on trouve $(e^{A(t)}u)' = 0$. Donc $e^{A(t)}u = c$ est constante sur I. Mais alors, la solution générale de l'équation homogène (H) est $u(t) = ce^{-A(t)}$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Pour trouver une solution particulière de l'équation (*), on peut faire appel à la méthode de variations des constantes : il s'agit de chercher une solution de (*) parmi les fonctions de la forme

$$u(t) = c(t)e^{-A(t)}.$$

Un petit calcul montre qu'il faut que $c'(t) = f(t)e^{A(t)}$. En conclusion, la solution générale de l'équation (*) est

$$u(t) = c(t)e^{-A(t)} + c\,e^{-A(t)},$$

où

$$c(t) = \int f(t)e^{A(t)}\,\mathrm{d}t, \quad A(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t, \ \textit{et } c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.18

La solution générale sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle

$$u' + u/t = e^t$$

Exemple 2.18

La solution générale sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$u' + u/t = e^t$$

est, d'après l'application de la méthode ci-dessus,

$$u(t) = \frac{(t-1)e^t}{t} + c\,\frac{1}{t}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Théorème 2.10

Soit l'équation différentielle linéaire sur l'intervalle I :

$$u^{(k)} + a_{k-1}(t)u^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t). \qquad \text{(L)}$$

Pour tous réels $u_0, \ldots, u_{k-1}$, et tout $t_0 \in I$, il existe une et une seule solution $u\colon I \to \mathbb{R}$ de l'équation (L), vérifiant les conditions initiales

$$u(t_0) = u_0,\ u'(t_0) = u_1, \ldots,\ u^{(k-1)}(t_0) = u_{k-1}.$$

Ainsi, toute solution maximale de l'équation différentielle (L) est **globale***.*

Dém.

Théorème 2.10

Soit l'équation différentielle linéaire sur l'intervalle I :

$$u^{(k)} + a_{k-1}(t)u^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t). \qquad \text{(L)}$$

Pour tous réels $u_0, \ldots, u_{k-1}$, et tout $t_0 \in I$, il existe une et une seule solution $u\colon I \to \mathbb{R}$ de l'équation (L)*, vérifiant les conditions initiales*

$$u(t_0) = u_0,\; u'(t_0) = u_1, \ldots,\; u^{(k-1)}(t_0) = u_{k-1}.$$

Ainsi, toute solution maximale de l'équation différentielle (L) *est* **globale***.*

Dém.

En effet, introduisons les fonctions vectorielles $v\colon I \to \mathbb{R}^k$ et $F\colon I \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, où

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(k-1)} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad F(t,v) = \begin{pmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_k \\ -\big(a_{k-1}(t)v_k + \cdots + a_1(t)v_2 + a_0(t)v_1\big) + f(t). \end{pmatrix}$$

Observons qu'alors l'équation scalaire (L) équivaut à l'équation vectorielle d'ordre 1

$$v' = F(t,v).$$

Les conditions initiales se traduisent par la condition vectorielle $v(t_0) = v_0$, où $v_0 = (u_0, \ldots u_{k-1})$.

suite de la dém.

suite de la dém.

Appliquons le théorème 2.8 : il conviendra de travailler avec la norme sur $\mathbb{R}^k$, $\|\alpha\|_1 = |\alpha_1| + \cdots |\alpha_k|$ qui est équivalente à la norme euclidienne.

- F est continue (facile à voir)
- Pour tout intervalle compact $K \subset I$, l'on peut trouver une constante $C > 0$ telle que, pour tout $t \in K$, on a $\max_{j=1,\dots k-1} |a_j(t)| \le C$.

Mais alors,

$$\begin{aligned}\|F(t,v) - F(t,w)\|_1 &= \left\| \begin{pmatrix} (v-w)_2 \\ \vdots \\ (v-w)_k \\ -\big(a_{k-1}(t)(v-w)_k + \cdots + a_1(t)(v-w)_2 + a_0(t)(v-w)_1\big) \end{pmatrix} \right\|_1 \\ &\le (1+C)\|v-w\|_1.\end{aligned}$$

Les conditions du théoreme de Cauchy–Lipschitz vectoriel sont alors satisfaites.
Posons $D = \max_{x \in K} |f(t)|$. Mais alors,

$$\begin{aligned}\|F(t,v)\|_1 &\le \|v\|_1 + \left| a_{k-1}(t)u^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u \right| + |f(t)| \\ &\le (1+C)\|v\|_1 + D.\end{aligned}$$

Ceci permet d'appliquer le théorème d'existence globale (2.9). □

Remarque 2.3

L'équation différentielle scalaire (L) s'écrit aussi sous la forme matricielle suivante :

$$v' = M(t)v + B(t).$$

Ici,

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & \cdots & -a_{k-1}(t) \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$v = (u, u', \dots, u^{(k-1)}).$$

Théorème 2.11 (structure des solutions d'une éq. diff. homogène)

L'ensemble $\mathcal{V}_0$ des solutions de l'équation différentielle homogène (L) *(c'est à dire avec second membre $f \equiv 0$) est un espace vectoriel de dimension k.*

Dém.

Théorème 2.11 (structure des solutions d'une éq. diff. homogène)

L'ensemble $\mathcal{V}_0$ des solutions de l'équation différentielle homogène (L) *(c'est à dire avec second membre $f \equiv 0$) est un espace vectoriel de dimension k.*

Dém.

En effet, pour $j = 0, \dots k-1$, considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} E(u) = 0 \\ u^{(i)}(t_0) = \delta_{i,j}, \quad i = 0, \dots, k-1 \end{cases} \tag{C_j}$$

où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 si $i \neq j$ est le symbole de Kronecker. Le problème (C_j) possède une unique solution $u_j(t)$, définie sur tout l'intervalle I. Ces solutions $u_0(t)$, $u_1(t)$,... $u_{k-1}(t)$ sont linéairement indépendantes dans l'espace $\mathcal{V}_0$. En effet, si

$$\lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{k-1} u_{k-1} = 0,$$

alors $v := \lambda_0 u_0 + \cdots + \lambda_{k-1} u_{k-1}$ est la fonction identiquement nulle. Mais alors,

$$\begin{cases} 0 = v(t_0) = \lambda_0 \\ 0 = v'(t_0) = \lambda_1 \\ \dots \\ 0 = v^{(k-1)}(t_0) = \lambda_{k-1}, \end{cases}$$

suite de la dém.

D'autre part, toute solution w de l'équation (L) s'écrit

$$w(t) = w(t_0)u_0(t) + \cdots w^{(k-1)}(t_0)u_{k-1}(t).$$

En effet, le terme à droite et la fonction w sont solutions d'un même problème de Cauchy et donc elle doivent être la même solution. Autrement dit, $(u_0, \ldots u_{k-1})$ est un système de générateurs pour $\mathcal{V}_0$. □

Une équation différentielle linéaire **homogène à coefficients constants** est une équation de la forme

$$u^{(k)} + a_{k-1}u^{(k-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = 0, \tag{H}$$

où $a_{k-1}, \ldots, a_0$ sont des constantes réelles.
Introduisons le polynôme caractéristique de cette équation, qui par définition est le polynôme

$$P(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Exemple 2.19

L'équation différentielle homogène et à coefficients constants d'ordre 2

$$u'' - 3u' + 2u = 0$$

Une équation différentielle linéaire **homogène à coefficients constants** est une équation de la forme

$$u^{(k)} + a_{k-1}u^{(k-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = 0, \tag{H}$$

où $a_{k-1}, \ldots, a_0$ sont des constantes réelles.
Introduisons le polynôme caractéristique de cette équation, qui par définition est le polynôme

$$P(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Exemple 2.19

L'équation différentielle homogène et à coefficients constants d'ordre 2

$$u'' - 3u' + 2u = 0$$

a pour polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, qui possède les deux racines réelles $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. Observons que e^t et e^{2t} sont deux solutions linéarement indépendantes de l'équation différentielle. Donc l'équation a pour solution générale

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.20

L'équation différentielle homogène et à coefficients constants d'ordre 2

$$u'' - 2u' + u = 0$$

Exemple 2.20

L'équation différentielle homogène et à coefficients constants d'ordre 2

$$u'' - 2u' + u = 0$$

a pour polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, qui possède une racine double $\lambda = 1$. Observons que e^t est bien une solution de l'équation différentielle. Mais cela ne suffit pas pour décrire la solution générale $\mathcal{V}_0$, qui est un espace de dimension 2. Observons cependant que te^t est une autre solution de l'équation, indépendente de la précédente. Donc l'équation a pour solution générale

$$u(t) = c_1 e^t + c_2\, te^t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Proposition 2.12

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sont les k racines (éventuellement complexes) du poynôme caractéristique, alors les k fonctions

$$e^{\lambda_1 t}, \; e^{\lambda_2 t}, \; \ldots, \; e^{\lambda_k t}$$

sont des solutions de l'équation homogène (H).

- *Si toutes les racines sont distinctes, ces solutions engendrent la solution générale de l'équation (H).*
- *S'il y a une racine λ avec multiplicité $m \geq 1$, alors les fonctions*

  $$e^{\lambda t}, \; te^{\lambda t}, \; \ldots, \; t^{m-1}e^{\lambda t}$$

  sont également des solutions de l'équation (H).

Si l'une de ces racines est complexe, par exemple $\lambda = \alpha + i\beta$, alors $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ est aussi une racine. Mais

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$
$$e^{\bar{\lambda} t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)).$$

Ces fonctions sont alors deux solutions à valeurs complexes de l'équation (H). On construit cependant deux solutions à valeurs réelles en prenant

$$\frac{e^{\lambda t} + e^{\lambda t}}{2} = e^{\alpha t} \cos(\beta t), \qquad \frac{e^{\lambda t} - e^{\lambda t}}{2i} = e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

Exemple 2.21

L'équation
$$u''' - 2u'' + 2u' = 0$$

Exemple 2.21

L'équation
$$u''' - 2u'' + 2u' = 0$$
admet le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda$ dont les racines sont $\lambda = 0$, $\lambda = 1 + i$ et $\lambda = 1 - i$. La solution générale est alors
$$u(t) = c_1 + c_2 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.22

Quels sont les fonctions telles que $u'''' = 4u$?

Exemple 2.21

L'équation

$$u''' - 2u'' + 2u' = 0$$

admet le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda$ dont les racines sont $\lambda = 0$, $\lambda = 1 + i$ et $\lambda = 1 - i$. La solution générale est alors

$$u(t) = c_1 + c_2 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.22

Quels sont les fonctions telles que $u'''' = 4u$?
Ici le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^4 - 4$ qui admet les racines $\pm\sqrt{2}$ et $\pm i\sqrt{2}$.
Les fonctions cherchées sont les fonctions de la forme

$$c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} + c_3 \cos(\sqrt{2}t) + c_4 \sin(\sqrt{2}t),$$

avec c_1, c_2, c_3, c_4 réels.

Plus en général, on peut considérer les équations différentielles linéaires à coefficients constants avec second membre.

$$u^{(k)} + a_{k-1}u^{(k-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = f(t). \tag{E}$$

Les techniques vu précedemment fournissent la solution générale de l'équation homogène associée. Pour trouver la solution générale de l'équation (E) il ne reste qu'à trouver une solution particulière de (E). Pour ce faire, on peut chercher d'abord des solutions qui "ressemblent" à la fonction $f(t)$[2]. Si on n'en trouve pas, il peut être utile d'appliquer la méthode de variations des constantes.

2. Si $f(t)$ est de la forme $P(t)e^{\lambda t}$, avec $P(t)$ polynôme, on cherchera une solution de la forme $Q(t)e^{\lambda t}$ avec $Q(t)$ polynôme du même degré que $P(t)$. Si $f(t)$ est de la forme $\sin(\lambda t)$, ou $\cos(\lambda t)$, on cherchera une solution de la forme $A\cos t + B\sin t$. Cette méthode ne fonctionne pas si la solution particulière que l'on cherche de l'équation avec second membre s'avère être une solution de l'équation homogène associée.

Les inégalités de Gronwall sont des inégalités différentielles ou intégrales. Il en existe plusieurs variantes, qu'il n'est pas indispensable de connaitre par coeur.

Lemme 2.13 (version différentielle)

Soient $a(t)$ et $b(t)$ deux fontions continues dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si u est une fonction de classe C^1 dans I vérifiant

$$\forall\, t \in I, :\ \ u'(t) \leq a(t)u'(t) + b(t),$$

et $t_0 \in I$, alors

$$u(t) \leq u(t_0) e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\, b(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dém.

Les inégalités de Gronwall sont des inégalités différentielles ou intégrales. Il en existe plusieurs variantes, qu'il n'est pas indispensable de connaitre par coeur.

Lemme 2.13 (version différentielle)

Soient $a(t)$ et $b(t)$ deux fontions continues dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si u est une fonction de classe C^1 dans I vérifiant

$$\forall\, t \in I, :\ \ u'(t) \le a(t)u'(t) + b(t),$$

et $t_0 \in I$, alors

$$u(t) \le u(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\, b(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dém.

On raisonne comme dans le cas d'égalité et on multiplie terme-à-terme par $e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$. Ceci est légitime puisque on multiplie là l'inégalité par une expression positive. Ensuite il suffit d'intégrer terme-à-terme. $\square$

La version intégrale est bien souvent plus utile :

Lemme 2.14 (version intégrale)

Soit $a(t)$ une fonction continue sur $[0, T]$, où $T > 0$, avec $a(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Si $u(t)$ est continue et vérifie l'inégalité intégrale

$$\forall\, t \in [0, T]: \ \ u(t) \leq C + \int_0^t a(s)u(s)\,\mathrm{d}s,$$

avec $C \geq 0$ indépendante de t, alors

$$u(t) \leq Ce^{\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Il existe de nombreuses variantes de l'inégalités de Gronwall, qui généralisent les résultats des lemmes précédents.

Démonstration.

Posons

$$f(t) = \frac{C + \int_0^t a(s)u(s)\,\mathrm{d}s}{\exp\left(\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\right)}.$$

Alors,

Démonstration.

Posons

$$f(t) = \frac{C + \int_0^t a(s)u(s)\,\mathrm{d}s}{\exp\left(\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\right)}.$$

Alors,

$$f'(t) = a(t)\frac{u(t) - C - \int_0^t a(s)u(s)\,\mathrm{d}s}{\exp\left(\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\right)} \leq 0.$$

Donc $f(t) \leq f(0) = C$. Mais

$$u(t) \leq C + \int_0^t a(s)u(s)\,\mathrm{d}s = f(t)\exp\left(\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

et l'inégalité de Gronwall en découle.

□