

Analyse pour l'économie 2

Lorenzo Brandolese

1 Formule de Taylor et développements limités

Soit f une fonction de classe C^2 dans un ouvert U de \mathbb{R}^n et soit $x_0 \in U$, et $\delta > 0$ tel que $B(x_0, \delta) \subset U$. Si $v \in \mathbb{R}^n$ est une direction et $0 \leq t \leq \delta$, on pose :

$$F(t) = f(x_0 + tv).$$

La formule de Taylor centrée en 0 pour la fonction F d'ordre 2 s'écrit

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + o(t^2), \quad \text{pour } t \rightarrow 0. \tag{1.1}$$

D'autre part,

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0 + tv) = \sum_{i=1}^n D_i(f)(x_0 + tv) v_i,$$

$$F''(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial D_i(f)}{\partial v}(x_0 + tv) v_i = \sum_{i,j=1}^n D_i D_j(f)(x_0 + tv) v_i v_j.$$

Cela donne,

$$f(x_0 + tv) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n D_i(f)(x_0)tv_i + \sum_{i,j=1}^n \frac{D_i D_j(f)}{2!}(x_0)t^2 v_i v_j + o(t^2) \quad \text{pour } t \rightarrow 0.$$

En posant $h = tv$ (et donc $|t| = \|h\|$) on obtient, pour $\|h\| \rightarrow 0$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n D_i(f)(x_0)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D_i D_j(f)(x_0)h_i h_j + o(\|h\|^2).$$

C'est la formule de Taylor d'ordre 2 pour les fonctions de plusieurs variables. Le terme à droite est le *développement limité d'ordre 2* de f centré en x_0 . En observer la structure typique :

constante + partie linéaire en h + partie quadratique en h + reste.

Plus en général, si f est de classe C^k au voisinage de x_0 , on pourra écrire la formule de Taylor d'ordre k pour F au voisinage de 0 :

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{F^{(k)}(0)}{k!}t^k + o(t^k), \quad \text{pour } t \rightarrow 0.$$

D'autre part, en généralisant les formules pour $F'(t)$ et $F''(t)$ on trouve

$$F^{(k)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k}(f)(x_0 + tv) v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k}.$$

On obtient alors, pour $x \rightarrow x_0$,

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n D_i f(x_0) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D_i D_j f(x_0) h_i h_j + \dots \\
 + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} f(x_0) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} + o(\|h\|^k).
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

Le terme à droite est le développement limité d'ordre k pour f centré en x_0 .

2 Extrema de fonctions de plusieurs variables

2.1 Points stationnaires

Définition 2.1 (extrema locaux). Soit $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in D$. On dit que x_0 est un point de maximum relatif (ou local) pour f s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in V \cap D$. Dans ce cas on dit que la valeur $f(x_0)$ est un maximum relatif (ou local) de la fonction f .

On dit que x_0 est un point de minimum relatif (ou local) pour f s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in V \cap D$. Dans ce cas on dit que la valeur $f(x_0)$ est un minimum relatif (ou local) de la fonction f .

Si on a la condition plus forte $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in D$ on dit que x_0 est un (point de) maximum absolu, ou global, pour f dans D . De même, si $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in D$ on dit que x_0 est un point de minimum absolu, ou global, pour f dans D .

Les points de minimum s'appellent aussi *minimiseurs* et les points de maximum *maximiseurs*.

Exemple 2.1.

- (i) Étudions les extrema locaux et globaux de la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, où $f(x) = (x^2 - 1)^2$ sur \mathbb{R} .
- (ii) Étudions les extrema locaux et globaux de même fonction f sur l'intervalle $I = [\frac{1}{2}, 2]$.

Les réponses suivantes s'obtiennent en traçant le graphe de la fonction f à l'aide d'un tableau de variations.

- (i) f possède 3 extrema locaux en 0, 1 et -1 , plus précisément 0 est un point de maximum locale (mais ce n'est pas un point de maximum globale : le maximum globale de f n'existe pas). De plus ± 1 sont deux points de minimum globaux sur \mathbb{R} et $\min_{\mathbb{R}} f = 0$.
- (ii) Sur l'intervalle I , 1 est le seul point minimum global pour f On a $\min_I f = 0$ De plus, 2 est le seul point de maximum globale pour f dans I et $\max_I f = 9$. D'autre part $\frac{1}{2}$ est un point de maximum local (non global) de f dans I .

Observons que dans l'exemple précédent, dans le cas (i), tous les extrema locaux ont été trouvés parmi les points où f' s'annule : c'est dû au fait que la fonction a été étudié sur un intervalle ouvert. Dans le cas (ii) ce n'est plus le cas.

Dans cette section on se focalise sur la recherche de point d'extrema *libres*, c'est-à-dire les points de minimum ou maximum à l'intérieur de l'ensemble de définition de la fonction. Cela revient à supposer que la fonction es définie sur un ouvert.

Proposition 2.1 (CNPO ou CN1). Soit $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, où U est un ouvert de \mathbb{R}^n et $x_0 \in U$ un extremum local (c'est à dire un maximum local ou un minimum local) pour f . Si f est dérivable le long d'une direction v , alors $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$. En particulier, si f est différentiable en x_0 , alors toutes les dérivées partielles de f s'annulent en x_0 et $\nabla f(x_0) = 0$.

Dém. La fonction d'une seule variable $F(t) = f(x_0 + tv)$ est dérivable en $t = 0$, où elle possède un extremum local. Par le critère de Fermat, $F'(0) = 0$. Mais alors $0 = F'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$. \square

Un point x_0 où f est différentiable et $\nabla f(x_0) = 0$ s'appelle un *point stationnaire* ou *point critique* pour f .

Les points de minimum et maximum locaux d'une fonction différentiable $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sont alors à chercher parmi les point stationnaires, qui sont les solutions du système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0, \end{cases} \quad x \in \overset{\circ}{D}, \quad (\text{CN1})$$

ou éventuellement parmi les points de $D \setminus \overset{\circ}{D}$. Ces points sont situés sur la frontière de l'ensemble D .

Le système ci-dessus s'appelle en abrégé (CNPO) ("conditions nécessaires du premier ordre") ou (CN1), puisque ce sont les dérivées d'ordre 1 qui interviennent. Vérifier ces condition n'est pas une condition suffisante pour garantir que les solutions trouvées soient bien de minimiseurs ou de maximiseurs : par exemple, pour la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^3$ ce système se réduit à la seule équation $3x^2 = 0$. La solution $x = 0$ ne correspond pas à un extremum pour f .

Observer que (CN1) est un système (non-linéaire!) de n équations et n inconnues. Il n'y a malheureusement pas de théorie générale pour trouver les solutions.

Exemple 2.2. Trouver les extrema locaux et globaux de la fonction $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ sur son ensemble de définition.

Réponse : L'ensemble de définition est le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Ce n'est pas un ouvert. Cherchons les points stationnaires intérieurs à D , c'est à dire dans $\overset{\circ}{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. L'unique solution du système (CN1) est le point $(0, 0)$. Observons que $f(0, 0) = 1$. Mais on voit immédiatement que $f(x, y) \leq 1$ pour tout $(x, y) \in D$, donc l'origine est un point de maximum global pour f . Il n'y a pas de point de minimum (local ou globale) à l'intérieur de D (sinon on aurait trouvé d'autres points stationnaires); cherchons alors le minimum de f sur la frontière, qui est le cercle $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Mais on voit que la fonction f s'annule sur ∂D ; d'autre part $f \geq 0$ dans D . La conclusion est que tous les points de ∂D sont des points de minimum global pour f .

Exemple 2.3. On cherche à construire un caisson de 20m^3 . Le matériau pour le fond coûte 3 euros/ m^2 , pour le couvercle 2 euros/ m^2 et pour les côtés 1 euro/ m^2 . Quel est le caisson le moins cher ? Et le plus cher ?

Réponse :

Modélisation : Notons x (=longueur), y (=largeur), z (=hauteur) les mesures du caisson en mètres. Le coût de construction est $C(x, y, z) = 3xy + 2xy + 2(xz + yz) = 5xy + 2xz + 2yz$. Il s'agit de résoudre les problèmes de minimisation et maximisation pour C "avec contrainte" : $\min\{C(x, y, z) : xyz = 20\}$ et $\max\{C(x, y, z) : xyz = 20\}$.

Élimination de la contrainte et recherche des points stationnaires : L'ensemble des points vérifiant $xyz = 20$ n'est pas un ouvert, c'est pourquoi la proposition (CN1) ne s'applique pas directement à la fonction C . On impose $z = 20/(xy)$ et on étudie la fonction

$$f(x, y) = C(x, y, \frac{20}{xy}) = 5xy + 40(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}), \quad x > 0, y > 0.$$

Nous pouvons appliquer la proposition (CN1) à la fonction f , qui est bien définie dans un ouvert. Le système $\nabla f(x, y) = 0$ possède une seule solution pour $x > 0$ et $y > 0$. Elle est donnée par $x = y = 2$ (et donc $z = 5$).

Synthèse : On construit donc un caisson de mesures $2 \times 2 \times 5$. Ce choix correspond-t-il au caisson de coût minimum ou maximum ? Le problème de minimisation est-il *bien posé* ? Et celui de maximisation ? [Voir l'exemple ci-après].

Dans la pratique, les fonction dont on étudie les problèmes d'optimisation sont souvent continues. Le théorème de Weierstrass est alors un outil essentiel pour garantir que des solutions existent. Mais ce théorème ne s'applique pas toujours (comme par exemple dans l'exemple précédent). Le théorème suivant est une variante utile.

Théorème 2.2 (Weierstrass - variante). *Soit $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $\bar{x} \in D$ et si l'ensemble de sous-niveau $K = \{x \in D: f(x) \leq f(\bar{x})\}$ est compact, alors le problème de minimisation $\min_{x \in D} f(x)$ possède une solution. Autrement dit, il existe $x^* \in D$ tel que $f(x^*) = \min_{x \in D} f(x)$.*

Dém. En effet, il existe $x^* \in K$ tel que $f(x^*) = \min_{x \in K} f(x)$, par le théorème de Weierstrass. Mais $f(x^*) \leq f(\bar{x})$ puisque $\bar{x} \in K$. Si $x \in K$ on a $f(x) \geq f(x^*)$ par définition de x^* . Si $x \in D$ et $x \notin K$ on a $f(x) > f(\bar{x}) \geq f(x^*)$. En conclusion, $f(x^*) = \min_{x \in D} f(x)$. \square

Le cas typique d'application est celui d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Une telle fonction a tous les ensembles de sous-niveau bornés (pourquoi ?). Si de plus f est continue, ses ensembles de sous-niveau sont fermés (pourquoi ?) et donc compacts. La fonction possède alors un minimum absolu.

Bien entendu on peut établir un théorème analogue pour l'existence d'un maximum absolu : il s'agit cette fois-ci de supposer que l'ensemble de "sur-niveau" $\{x: f(x) \geq f(\bar{x})\}$ est borné. Le cas typique d'application est celui d'une fonction continue telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple 2.4 (Retour à l'exemple 6.7). Appliquons cette variante du théorème de Weierstrass avec $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ (ce choix est arbitraire). Observons que l'ensemble de sous-niveau $K = \{(x, y): f(x, y) \leq f(1, 1)\} = \{5xy + 40(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}) \leq 85\}$ est compact (en effet, il est manifestement fermé et il est borné, puisque $x \geq 40/85$, $y \geq 40/85$ et $5xy \leq 85 \Rightarrow x \leq 17 \cdot 85/40$ et $y \leq 17 \cdot 85/40$). Mais alors le problème de minimisation de l'exemple 6.7 est bien posé, c'est-à-dire que le caisson de coût minimum existe : c'est bien le caisson de mesures $2 \times 2 \times 5$ trouvé avant. Le problème de maximisation est mal posé : le caisson de coût maximum n'existe pas.

2.2 Fonctions quadratiques et matrice hessienne

Un peu d'algèbre linéaire. Commençons par des rappels d'algèbre linéaire. Un système linéaire homogène de n équations et n inconnues se représente par l'équation matricielle

$$Ax = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

où A est une matrice carrée $n \times n$. Ce système possède toujours comme solutions au moins le vecteur nul $x = 0$. Il est bien connu que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait d'autres solutions $x \neq 0$ est que $\det A = 0$.

Définition 2.2. *Un nombre réel (ou complexe) λ est dit valeur propre d'une matrice carrée A s'il existe $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $Aw = \lambda w$. Le vecteur w s'appelle alors vecteur propre pour A .*

Observons que si λ est une valeur propre alors $(A - \lambda I)w = 0$, avec $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Mais cela est possible si et seulement si

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{2.1}$$

Chercher les valeurs propres revient à résoudre l'équation d'inconnue λ (2.1). En général, (2.1) est une équation polynomiale en λ , de degré n . Le terme à gauche dans (2.1) s'appelle le *polynôme caractéristique* de A . Cette équation possède alors n solutions, comptées avec leur multiplicité. Ces solutions sont éventuellement complexes.

Exemple 2.5. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ possède 2 valeurs propres λ_1 et λ_2 . Celles-ci sont les deux solutions d'une équation polynomiale de degré 2 :

$$0 = \det \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 1.$$

Donc $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{29})$.

Théorème 2.3 (démonstration hors programme. Voir le cours d'algèbre.). *Si A est une matrice carrée symétrique de taille $n \times n$, c'est-à-dire $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$, alors les valeurs propres de A sont toutes réelles.*

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice *symétrique* $n \times n$. Le produit entre la matrice A et le vecteur $h = (h_1, \dots, h_n)^T$ est donné par le vecteur de composantes $(Ah)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}h_j$. Une *forme quadratique* est une application : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$h \mapsto \langle Ah, h \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}h_ih_j.$$

Exemple 2.6. Les formes quadratiques de \mathbb{R}^2 sont toutes et seules les fonctions de la forme

$$(x, y) \mapsto \left\langle \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = r x^2 + 2s xy + t y^2.$$

Les formes quadratiques de \mathbb{R}^3 sont toutes et seules les fonctions de la forme

$$(x, y, z) \mapsto \left\langle \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = a x^2 + 2b xy + 2c xz + d y^2 + 2e yz + f z^2.$$

Le cas des fonctions de plusieurs variables. Les formes quadratiques apparaissent naturellement dans la formule de Taylor d'ordre 2. En effet, soit f une fonction de classe C^2 au voisinage d'un point x_0 . Considérons la *matrice hessienne de f en x_0* , c'est à dire la matrice symétrique de taille $n \times n$ des dérivées partielles secondes

$$H = H_f(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Pour les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la matrice hessienne est réduite au seul nombre $f''(x_0)$.

La formule de Taylor pour f d'ordre 2 s'écrit alors

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x_0)h, h \rangle + o(\|h\|^2).$$

Si de plus x_0 est un point stationnaire, on a $\nabla f(x_0) = 0$ et donc la formule précédente devient

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{2} \langle H_f(x_0)h, h \rangle + o(\|h\|^2), \quad (2.2)$$

qui est la généralisation naturelle de (2.4).

Pour déterminer la nature du point stationnaire x_0 on est amené à diviser terme-à-terme par $\|h\|^2$ et prendre $\|h\| \rightarrow 0$. Cela conduit à étudier la fonction $h \mapsto \frac{\langle H_f(x_0)h, h \rangle}{\|h\|^2}$.

Plus en général, étudions alors les fonctions de type

$$F(h) = \frac{\langle Ah, h \rangle}{\|h\|^2}, \quad h \neq 0. \quad (2.3)$$

avec $A = (a_{ij})$ matrice symétrique de taille $n \times n$.

Lemme 2.4. Soit $F(h) = \frac{\langle Ah, h \rangle}{\|h\|^2}$ avec $A = (a_{ij})$ matrice symétrique de taille $n \times n$. Les points stationnaires de F sont des vecteurs propres de la matrice A . De plus, si v est un vecteur propre de A , alors

$$Av = F(v)v,$$

c'est à dire que la valeur propre associée à v est $F(v)$.

Dém. Observons que $\frac{\partial}{\partial h_i}(\langle Ah, h \rangle) = 2 \sum_{j=1}^n a_{ij}h_j$ et que $\frac{\partial}{\partial h_i}\|h\|^2 = 2h_i$. Il en découle que

$$\frac{\partial F}{\partial h_i}(h) = 2 \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}h_j - F(h)h_i}{\|h\|^2} = 2 \frac{[Ah - F(h)h]_i}{\|h\|^2}.$$

Soit v un point stationnaire de F . Alors, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $\frac{\partial F}{\partial h_i}(v) = 0$. Mais alors les numérateurs de l'expression précédente s'annulent et on trouve

$$Av = F(v)v.$$

□

Lemme 2.5. Soit $F(h) = \frac{\langle Ah, h \rangle}{\|h\|^2}$ avec $A = (a_{ij})$ matrice symétrique de taille $n \times n$. Soit λ_1 et λ_n la plus petite et la plus grande valeurs propre de la matrice A . Alors

$$\min_{h \neq 0} F(h) = \lambda_1, \quad \text{et} \quad \max_{h \neq 0} F(h) = \lambda_n.$$

Dém. Observons que F est une fonction telle que, pour tout $\lambda > 0$, $F(\lambda h) = F(h)$. en particulier, en prenant $\lambda = \frac{1}{\|h\|}$ on voit que $F(h) = F(\frac{h}{\|h\|})$. Mais alors $\max_{h \neq 0} F(h) = \max\{F(\frac{h}{\|h\|}) : h \neq 0\} = \max\{F(h) : \|h\| = 1\}$. De même, $\min_{h \neq 0} F(h) = \min\{F(h) : \|h\| = 1\}$. L'ensemble $\{h : \|h\| = 1\}$ est la sphère unité qui est compact dans \mathbb{R}^n . La fonction F étant continue sur $\{h : \|h\| = 1\}$, le théorème de Weierstrass implique que F possède un maximum et un minimum absolu sur cet ensemble. Par la discussion précédente, F possède un minimum et un maximum absolu sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Soit donc h^* un point de minimum de F dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Alors h^* est un point stationnaire et par le lemme précédent $F(h^*)$ est une valeur propre de la matrice A . De plus, $Ah^* = F(h^*)h^*$.

Mais alors $\lambda_1 \leq F(h^*) = \min_{h \neq 0} F(h)$. Mais au valeur propre λ_1 correspondent un vecteur propre $v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. et l'on a $Av_1 = \lambda_1 v_1$, donc $F(v_1) = \lambda_1$. Donc $\min_{h \neq 0} F(h) \leq \lambda_1$.

Si \hat{h} est un point de maximum pour F , on procède de la même manière et on trouve $F(\hat{h}) = \lambda_n$. □

2.3 Problèmes d'optimisations : conditions d'ordre 2

Le cas de fonctions d'une seule variable. Rappels. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur l'intervalle ouvert $I =]a, b[$ et x_0 un point stationnaire pour f dans $]a, b[$, c'est-à-dire $f'(x_0) = 0$. Alors, par la formule de Taylor d'ordre 2,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + o(h^2), \quad \text{pour } h \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

Si on divise terme-à-terme par h^2 et on prend $h \rightarrow 0$ on en déduit :

$$\frac{1}{h^2}(f(x_0 + h) - f(x_0)) = \frac{1}{2}f''(x_0) + o(1), \quad \text{pour } h \rightarrow 0.$$

- Pour que x_0 soit un point de minimum local il est nécessaire que $f''(x_0) \geq 0$. (En effet, si x_0 est un point de minimum local, alors pour h assez petit le terme à gauche est ≥ 0).
- Pour que x_0 soit un point de minimum local il est suffisant que $f''(x_0) > 0$. (En effet, si $f''(x_0) > 0$ alors pour h assez petit $f''(x_0) + o(1) > 0$ et donc le terme à gauche est positif).
- Pour que x_0 soit un point de maximum local il est nécessaire que $f''(x_0) \leq 0$.
- Pour que x_0 soit un point de maximum local il est suffisant que $f''(x_0) < 0$.

Observer que lorsque $f''(x_0) = 0$ on ne peut rien conclure en général : on a parfois un minimum, ou un maximum, ou un point d'inflexion (considérer par exemple les cas $f(x) = x^3$, avec $x_0 = 0$).

Généralisons ces considérations aux fonctions de plusieurs variables.

Le théorème suivant établit des conditions nécessaires (CN2) et des conditions suffisantes (CS2), faisant intervenir les dérivées d'ordre 2, pour qu'un point soit un minimiseur ou un maximiseur local.

Théorème 2.6 (CN2-CS2). *Si $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 au voisinage de x_0 et si x_0 est un point stationnaire, alors :*

- Pour que x_0 soit un point de minimum local il est nécessaire que tous les valeurs propres de la matrices hessiennes de f soient ≥ 0 . (On dit que $H_f(x_0)$ est semi-définie positive).
- Pour que x_0 soit un point de minimum local il est suffisant que tous les valeurs propres de la matrices Hessiennes de f soient > 0 . (On dit que $H_f(x_0)$ est définie positive).
- Pour que x_0 soit un point de maximum local il est nécessaire que tous les valeurs propres de la matrices Hessiennes de f soient ≤ 0 . (On dit que $H_f(x_0)$ est semi-définie négative).
- Pour que x_0 soit un point de maximum local il est suffisant que tous les valeurs propres de la matrices Hessiennes de f soient < 0 . (On dit que $H_f(x_0)$ est définie négative).

Dém. Si x_0 est un point de minimum local, alors $\exists \delta > 0$ tel que pour tout $\|h\| < \delta$ on a (voir (2.2))

$$\frac{1}{2}\langle H_f(x_0)h, h \rangle + o(\|h\|^2) = f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0.$$

Mais alors, avec les notations du lemme précédent, appliqué à $A = H_f(x_0)$, on trouve, pour $\|h\| < \delta$,

$$F(h) + o(1) \geq 0.$$

Soit $\lambda_1 = \min_{h \neq 0} F(h) = F(v_1)$. Comme $F(v_1) = F(\alpha v_1)$ pour tout $\alpha > 0$, en prenant $\alpha \rightarrow 0$ on déduit de l'inégalité précédente

$$\lambda_1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} F(\alpha v_1) \geq 0.$$

Mais alors toutes les valeurs propres de $H_f(x_0)$ sont ≥ 0 . Cela prouve la première conclusion.

Supposons maintenant que toutes les valeurs propres soient strictement positives, et donc $\lambda_1 = \min_{h \neq 0} F(h) > 0$. En utilisant que

$$\frac{1}{\|h\|^2}[f(x_0 + h) - f(x_0)] = F(h) + o(1) \geq \lambda_1 + o(1), \quad \text{pour } h \rightarrow 0.$$

on voit que pour $\|h\|$ assez petit cette expression est (strictement) positive. Donc x_0 est bien un point de minimum local (strict) pour f .

Les deux conclusions restantes se démontrent de la même manière. □

Remarque 2.7 (Points de selle). Il arrive parfois qu'un point critique ne soit ni de minimum, ni de maximum local. C'est le cas, par exemple quand la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice Hessienne vérifient $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$. On dit alors que x_0 est un *point de selle* (ou de *col*, ou de *min-max*). Par exemple, pour les fonctions de 2 variables, si (x_0, y_0) est un point de selle, alors la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ aura un minimum local en x_0 et la fonction $y \mapsto f(x, y)$ un maximum local en y_0 (ou l'inverse).

Règles pratiques pour appliquer le théorème 2.6 Pour appliquer le théorème 2.6 il n'est pas indispensable de calculer les valeurs propres de $H_f(x_0)$, puisque seul le signe des valeurs propres joue un rôle. Pour une fonctions de n variables, ces valeurs propres sont les solutions de l'équation (2.1), qui est une équation de la forme

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad (2.5)$$

où le polynôme à gauche est le polynôme caractéristique de la matrice $H_f(x_0)$.

Exercice 2.8. Démontrer que les racines de (2.5) (dont on sait qu'elles sont toutes réelles) :

- (i) sont toutes strictement négatives si et seulement si tous les coefficients $a_1 > 0, \dots, a_n > 0$.
- (ii) sont toutes strictement positives si et seulement si les coefficients vérifient $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 < 0$, etc.

Exemple 2.9. La fonction $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz$ a comme seul point stationnaire l'origine. On calcule aisément les dérivées partielles secondes en 0. On trouve alors.

$$\det(H_f(0) - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & -1 \\ 1 & 4 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = -(\lambda^3 - 8\lambda^2 + 18\lambda - 10) = 0.$$

Compte tenu du résultat de l'exercice précédent, les valeurs propres de la matrice Hessienne sont toutes strictement positives. L'origine est alors un point de minimum local. Cet analyse ne donne aucun renseignement sur la nature globale de ce point de minimum.

Exercice 2.10 (Une méthode pratique pour les fonction de 2 variables). Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Il est standard de noter $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Calculer $\det \begin{pmatrix} r - \lambda & s \\ s & t - \lambda \end{pmatrix}$ et en déduire que, en un point (x_0, y_0) :

- Si $rt - s^2 > 0$ alors (x_0, y_0) est un extremum local pour $f(x, y)$: un minimiseur si $r > 0$ et un maximiseur si $r < 0$.
- Si $rt - s^2 < 0$ alors (x_0, y_0) est un point de selle.

3 Intégrales multiples

Voir les notes de Vincent Borrelli

4 Courbes paramétrées

4.1 Courbes paramétrées

Dans tout ce chapitre $\|x\|$ désigne la norme euclidienne du vecteur $x \in \mathbb{R}^n$.

Une courbe dans \mathbb{R}^n est un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une application continue $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, où $[a, b]$ est un intervalle de \mathbb{R} , telle que

$$\Gamma = \{\varphi(t) : t \in [a, b]\}.$$

On dit aussi que φ est une *paramétrisation* de Γ , ou aussi que Γ est le *support* de la courbe paramétrée φ . Une paramétrisation permet de définir une *orientation* (c'est-à-dire un sens de parcours) sur Γ : le parcours allant du point $\varphi(a)$ au point $\varphi(b)$.

Interpretation cinématique. Si $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont les coordonnées d'un point matériel mobile à l'instant t , la *loi horaire* du mouvement, c'est à dire l'application $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ définit une courbe paramétrée φ dans \mathbb{R}^3 . Dans cet interprétation cinématique, le support Γ de la courbe est la *trajectoire* du point matériel. La *vitesse* instantanée du point est donnée par le vecteur $\varphi'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Définition 4.1. - On dit qu'une paramétrisation $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ d'une courbe Γ est régulière si φ est de classe C^1 (c'est à dire que ses composantes $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont toutes des fonctions de classe C^1) et si, pour tout $t \in [a, b]$, le vecteur $\varphi'(t) \in \mathbb{R}^n$ n'est pas le vecteur $(0, \dots, 0)$. S'il existe une partition finie $a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N = b$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que φ est régulière dans tout intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ on dit que φ est régulière par morceaux. Un point où $\varphi'(t_0)$ s'annule est dit point singulier.

- On dit qu'une courbe paramétrée $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est fermée si $\varphi(a) = \varphi(b)$.
- On dit qu'une courbe paramétrée $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est simple si $\varphi(t) \neq \varphi(t')$, pour tout $t \neq t'$ et $a < t < b$, $a < t' < b$. Cela signifie que la courbe n'a pas d'intersection avec elle même.

Exemple 4.1. - Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 , on peut toujours lui associer une courbe paramétrée dans \mathbb{R}^2 régulière, simple, non fermée, en prenant son graphe. Cela revient à poser $\varphi(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$.

- La fonction $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$, où $t \in [0, 2\pi]$ définit une paramétrisation régulière, simple, fermée. Le support de cette courbe paramétrée est le cercle de centre O et de rayon 1.
- La courbe paramétrée $\varphi(t) = (t^2, t^3)$, $t \in [-2, 2]$ est simple non régulière. En effet, observons que le vecteur dérivée $\varphi'(t) = (2t, 3t^2)$ s'annule pour $t = 0$. Pour dessiner cette courbe, on part du système $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ et on obtient, en éliminant t (il faut distinguer $t \geq 0$ et $t < 0$) $y = \pm x^{2/3}$, avec $0 \leq x \leq 4$. On voit alors sans peine que le support Γ de cette courbe présente un cusp à l'origine.
- Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et v un vecteur de \mathbb{R}^n . L'équation paramétrique de la droite d passant par le point $a = (a_1, \dots, a_n)$ et parallèle au vecteur $v = (v_1, \dots, v_n)$ est l'application

$$\varphi(t) = a + tv \quad t \in \mathbb{R}$$

Si $t_0 \in \mathbb{R}$, la même droite d peut aussi être paramétrée par

$$\varphi(t) = a + (t - t_0)v \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Les bords des polygones sont des exemples typiques de courbes qui admettent des paramétrisations régulières par morceaux, mais pas de paramétrisation régulières.

Droite et vecteur tangent. Soit φ une paramétrisation régulière, définie sur un intervalle $[a, b]$, et soit t_0 et t_1 deux points de cet intervalle. La droite passant par les points $\varphi(t_0)$ et $\varphi(t_1)$

s'identifie à la droite passant par $\varphi(t_0)$ et parallèle au vecteur $v = \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0}$. Ainsi, cette droite est paramétrée par l'application

$$t \mapsto \varphi(t_0) + (t - t_0) \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En passant à la limite pour $t_1 \rightarrow t_0$ on trouve

$$\varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

qui est l'équation paramétrique de la *droite tangente* au support de φ au point $\varphi(t_0)$. Observons que cette droite est parallèle au vecteur $\varphi'(t_0)$. Le vecteur

$$\vec{T}(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{\|\varphi'(t_0)\|}$$

qui est de norme unitaire, est donc le *verseur tangent* à la courbe au point $\varphi(t_0)$.

4.2 Longueur d'une courbe

Pour définir la longueur d'une courbe paramétrée $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, considérons la famille \mathcal{P} de toutes les partitions finies possibles $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$ de l'intervalle $[a, b]$. À partir d'une telle partition, on considère les points $\varphi(a_i)$, $i = 0, \dots, N$ appartenant au support de la courbe et les segments de \mathbb{R}^n , $[\varphi(a_i), \varphi(a_{i+1})] = \{(1-t)\varphi(a_i) + t\varphi(a_{i+1}) : t \in [0, 1]\}$. Si $P \in \mathcal{P}$ est une telle partition, la quantité

$$L(P) = \sum_{i=0}^{N-1} \|\varphi(a_i) - \varphi(a_{i+1})\|$$

n'est rien d'autre que la longueur de la ligne affine par morceaux qui relie les points $\varphi(a_i)$. Il est alors naturel de définir la longueur de la courbe comme

$$\text{Long}(\varphi) = \sup\{L(P) : P \in \mathcal{P}\}.$$

On peut démontrer que si φ est une courbe régulière par morceaux, alors la quantité ci-dessus est toujours finie.

Théorème 4.1. *Pour toute courbe paramétrée régulière par morceaux, on a*

$$\text{Long}(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt.$$

La démonstration de ce théorème est hors programme.

Exemple 4.2 (Longueur du cercle). En paramétrant le cercle centré en O et de rayon R par $\varphi(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ on voit que sa longueur est $\int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = 2\pi R$.

4.3 Paramétrisations équivalentes et abscisse curviligne

Une même courbe Γ peut être paramétrée de plusieurs manières différentes.

Définition 4.2. *On dit que deux paramétrisations régulières par morceaux $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\psi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ d'une même courbe sont équivalentes s'il existe un difféomorphisme $h: [a, b] \rightarrow [c, d]$ (h est donc une application bijective et h et h^{-1} sont de classe C^1) telle que, pour tout $t \in [a, b]$, on a*

$$\varphi(t) = \psi(h(t)).$$

Dans ce cas on écrit $\varphi \sim \psi$

La relation \sim est une relation d'équivalence. Observons que pour un difféomorphisme $h: [a, b] \rightarrow [c, d]$ il y a deux possibilités : soit h est strictement croissante, soit h est strictement décroissante (c'est une conséquence de la bijectivité, de la continuité, et du théorème des valeurs intermédiaires). Dans le premier cas on dit que φ et ψ ont la même orientation.

Exemple 4.3. Un quart de cercle peut être paramétrée par $t \mapsto (R \cos t, R \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$, mais aussi, en tant que graphe d'une fonction, par $x \mapsto (x, \sqrt{R^2 - x^2})$, $x \in [0, R]$. On construit le difféomorphisme $h: [0, \pi/2] \rightarrow [0, R]$ en posant $x = h(t) = R \cos t$. Les deux paramétrisations sont alors équivalentes. Observons que le sens de parcours n'est pas le même dans ce deux cas. En effet la fonction h est décroissante.

Remarque 4.4. Si $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\psi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec $\varphi \sim \psi$ par un difféomorphisme h , et si $s_0 = h(t_0)$, alors le vecteur tangent au point $\varphi(t_0) = \psi(s_0)$ est

$$\vec{T}(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{\|\varphi(t_0)\|} = \frac{\psi'(h(t_0))h'(t_0)}{\|\psi'(h(t_0))\| |h'(t_0)|} = \pm \frac{\psi'(s_0)}{\|\psi(s_0)\|},$$

avec le signe $+$ si φ et ψ ont la même orientation et le signe $-$ dans le cas contraire. Ce calcul montre que la droite tangente à une courbe Γ ne dépend pas de la paramétrisation choisie.

Définition 4.3. Une paramétrisation normale, ou paramétrisation par abscisse curviligne d'une courbe Γ , est une paramétrisation $\psi: [0, \text{Long}(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\|\psi'(s)\| = 1$ pour tout $0 \leq s \leq \text{Long}(\Gamma)$.

Proposition 4.2. Toute courbe Γ régulière par morceaux admet une paramétrisation normale équivalente

Dém. À partir d'une paramétrisation régulière par morceaux $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, construisons une paramétrisation normale $\psi \sim \varphi$. Pour cela il suffit de définir $h: [a, b] \rightarrow [0, \text{Long}(\varphi)]$, avec

$$h(t) = \int_a^t \|\varphi'(\tau)\| d\tau.$$

Cette application h définit bien un difféomorphisme entre $[a, b]$ et $[0, \text{Long}(\varphi)]$. Ensuite il suffit de poser $\psi(s) = \varphi(h^{-1}(s))$ (ou $\varphi(t) = \psi(h(t))$, de manière équivalente). Observons que $\psi'(s) = \varphi'(h^{-1}(s))(h^{-1})'(s)$. Mais, pour tout s , $h(h^{-1}(s)) = s$ et en dérivant terme-à-terme cette relation on trouve $(h^{-1})'(s) = 1/h'(h^{-1}(s))$ (c'est la formule usuelle de la dérivée de l'application inverse). Comme $h'(t) = \|\varphi(t)\|$, on trouve

$$\psi'(s) = \varphi'(h^{-1}(s)) \frac{1}{\|\varphi'(h^{-1}(s))\|}.$$

Mais alors $\|\psi'(s)\| = 1$. □

L'abscisse curviligne (c'est-à-dire, le paramètre d'une paramétrisation normale) d'une courbe Γ est traditionnellement notée avec la lettre s . Observons que la différentielle $ds = \|\varphi'(t)\| dt$ s'interprète comme un "élément infinitésimal de longueur de la courbe".

Définition 4.4. Soit $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, définie sur le support Γ d'une courbe régulière par morceaux, paramétrée par $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. L'intégrale curviligne de f le long Γ est définie par

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt.$$

Observons que dans le cas particulier où Γ est un intervalle $[a, b]$, en le paramétrant par $\varphi(t) = t$, on trouve que $\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(t) dt$. L'intégrale curviligne est donc une généralisation de l'intégrale usuelle.

Il est facile, à l'aide du théorème de changement de variables, de prouver que $\int_{\Gamma} f ds$ est indépendant de la paramétrisation choisie pour Γ . En particulier (en prenant la fonction constante $f = 1$) on voit que la longueur est indépendante du choix de la paramétrisation.

Exemple 4.5. Une paroi verticale est limitée par le haut par la courbe d'équation $t \mapsto (t, t^2, 6t)$, $t \in [0, 1]$. Quelle est l'aire de la surface de cette paroi ? Réponse. Le profil au sol de la paroi est la courbe Γ de \mathbb{R}^2 paramétrée par $t \mapsto (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$. Considérons ensuite la fonction $f(x, y) = 6x$. Il s'agit de calculer l'intégrale curviligne $\int_{\Gamma} f ds = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} 6t dt = [(1 + 4t^2)^{3/2}]_{t=0}^{t=1} = 5^{3/2} - 1$.

4.4 La courbure

Soit $\psi: [0, \text{Long}(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la **paramétrisation normale** d'une courbe Γ . On note par s l'abscisse curviligne. On suppose que φ est de classe C^2 .

On sait que $\|\psi'(s)\| = 1$, donc

$$\vec{T}(s) = \psi'(s),$$

est le vecteur tangent à la courbe au point $\psi(s)$. Soit $\vec{N}(s)$ le vecteur normal à $\vec{T}(s)$, de manière que $(\vec{T}(s), \vec{N}(s))$ soit une base orthonormée directe du plan*.

Proposition 4.3. *Il existe une fonction continue $s \mapsto \bar{\kappa}(s)$ telle que $\psi''(s) = \bar{\kappa}(s)\vec{N}(s)$. En particulier, si la courbe est paramétrée à l'aide de l'abscisse curviligne, alors la direction normale à la courbe au point $\varphi(s)$ est donnée par le vecteur $\varphi''(s)$.*

Dém. En effet $\psi'(s) \cdot \psi'(s) = \vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s) = \|\vec{T}(s)\|^2 = 1$. En dérivant par rapport à s on trouve $2\psi''(s) \cdot \psi'(s) = 0$. Mais alors $\psi''(s)$ est orthogonal à $\psi'(s)$, et donc parallèle à $\vec{N}(s)$. \square

Définition 4.5. La courbure algébrique $\bar{\kappa}(s)$ de ψ au point $\psi(s)$ est le nombre réel

$$\bar{\kappa}(s) = \psi''(s) \cdot \vec{N}(s) = \vec{T}'(s) \cdot \vec{N}(s).$$

La courbure de φ au point $\varphi(s)$ est le nombre ≥ 0

$$\kappa(s) = |\bar{\kappa}(s)| = \|\psi''(s)\|.$$

Le rayon de courbure est $R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$.

Si $\kappa(s) \neq 0$, on dit que le point $\psi(s)$ est birégulier.

Exemple 4.6. Le cercle de rayon R admet la paramétrisation normale $\psi(s) = (R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R})$. La courbure vaut $\kappa(s) = \|\psi''(s)\| = \frac{1}{R}$. La courbure d'un cercle de rayon R est donc constante et égale à $1/R$. Le rayon de courbure du cercle est alors constant égale à R .

Étant donnée une courbe Γ , il n'est pas aisé d'expliciter la paramétrisation normale (en effet, l'intégrale de longueur est souvent difficile à calculer). À partir d'une paramétrisation quelconque $t \mapsto \varphi(t)$, on peut trouver la courbure à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 4.4. *Soit $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^2 . Alors pour tout $t \in [a, b]$ on a*

$$\bar{\kappa}(t) = \frac{\det(\varphi'(t), \varphi''(t))}{\|\varphi'(t)\|^3}, \quad \text{et} \quad \kappa(t) = \frac{|\det(\varphi'(t), \varphi''(t))|}{\|\varphi'(t)\|^3}.$$

*. Rappelons que si \vec{T} et \vec{N} sont deux vecteurs dans le plan orthogonal, de norme unitaire, alors le déterminant de la matrice 2×2 (\vec{T}, \vec{N}) est de déterminant ± 1 . Affirmer que $(\vec{T}(s), \vec{N}(s))$ est une "base directe" signifie que le déterminant est positif

Dém. Considérons la paramétrisation normale $\psi(s) = \varphi(t(s))$ de Γ , où $t(s) = h^{-1}(s)$, h étant le difféomorphisme introduit dans la démonstration de la Proposition 4.2. Nous avons (voir la démonstration de la Proposition 4.2) :

$$\psi'(s) = \frac{\varphi'(t(s))}{\|\varphi'(t(s))\|}.$$

En dérivant par rapport à s on trouve

$$\psi''(s) = \frac{\varphi''(t(s))}{\|\varphi'(t(s))\|^2} + \lambda(s)\varphi'(t(s)),$$

où $\lambda(s)$ est la dérivée de la fonction $s \mapsto \frac{1}{\|\varphi'(t(s))\|}$, qu'on n'aura pas besoin de calculer. Donc, en appliquant les propriétés élémentaires du déterminant $\det(\vec{a}, \vec{b} + \lambda\vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}) + \lambda \det(\vec{a}, \vec{c})$ et $\det(\vec{c}, \vec{c}) = 0$, on voit que

$$\det(\psi'(s), \psi''(s)) = \frac{\det(\varphi'(t), \varphi''(t))}{\|\varphi'(t)\|^3}.$$

D'autre part,

$$\det(\varphi'(s), \psi''(s)) = \det(\vec{T}(s), \bar{\kappa}(s)\vec{N}(s)) = \bar{\kappa}(s).$$

□

4.5 Étude locale des courbes planes

Considérons une paramétrisation normale $\psi: [0, \text{Long}(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'une courbe Γ , et supposons ψ de classe C^2 .

Au voisinage de $s_0 \in [0, \text{Long}(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^2$, en écrivant un développement limité d'ordre 2 on trouve

$$\psi(s) = \psi(s_0) + (s - s_0)\psi'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}\psi''(s_0) + o((s - s_0)^2).$$

On sait déjà que $s \mapsto \varphi(s_0) + (s - s_0)\varphi'(s_0)$ est la paramétrisation de la droite tangente à la courbe au point $\psi(s_0)$. Le terme suivant du développement $\frac{(s - s_0)^2}{2}\psi''(s_0)$ (son signe, notamment) nous renseigne sur le positionnement de la courbe par rapport à cette droite, au voisinage de $\psi(s_0)$. Plus précisément, réécrivons le développement précédent comme

$$\psi(s) = \psi(s_0) + (s - s_0)\vec{T}(s_0) + \bar{\kappa}(s_0)\frac{(s - s_0)^2}{2}\vec{N}(s_0) + o((s - s_0)^2).$$

Si $\psi(s_0)$ est un point bi-régulier, les vecteurs $\vec{T}(s_0)$ et $\vec{N}(s_0)$ sont bien définis. Dans le repère orthonormé $(\psi(s_0), \vec{T}(s_0), \vec{N}(s_0))$, c'est-à-dire le repère avec pour origine $\psi(s_0)$ et base $(\vec{T}(s_0), \vec{N}(s_0))$, la courbe Γ admet alors pour composantes (en négligeant les termes d'ordre supérieur)

$$(s - s_0, \bar{\kappa}(s_0)\frac{(s - s_0)^2}{2}).$$

Ainsi, dans ce repère la courbe se comporte localement comme une parabole.

Exemple d'étude d'un point singulier Si $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation d'une courbe admettant un point singulier $\varphi(t_0)$, la formule pour la construction de la droite tangente (4.1) ne s'applique plus. Certaines courbes admettent cependant une droite tangente aux points singuliers. Si c'est le cas, la pente de cette droite est donnée par la limite

$$\ell = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}.$$

La droite est alors celle d'équation $y = \ell(x - x(t_0)) + y(t_0)$.

Exemple 4.7. Étudions le point singulier de la courbe paramétrée par $x(t) = 1 + t^2$ et $y(t) = -1 + t^2 - t^3$. Le point singulier est $(x(0), y(0)) = (1, -1)$. La limite $\ell = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)}$ existe et vaut $\ell = 1$. La droite tangente au point singulier est donc la droite d'équation $y = x - 2$. Pour connaître l'allure de la courbe au voisinage du point singulier, étudions la position de la courbe par rapport au point $(1, -1)$: pour cela observons que $x(t) - 1 = t^2 \geq 0$ et $y(t) + 1 = t^2 - t^3 \geq 0$ au voisinage de $t = 0$, la courbe reste alors à la droite et en haut par rapport au point $(1, -1)$, au voisinage de celui-ci. Étudions ensuite la position de la courbe par rapport à sa droite tangente : on a $y(t) - x(t) + 2 = -t^3$, qui change de signe en $t = 0$. Ainsi la courbe est à la fois au dessus et en dessous de sa droite tangente au voisinage du point $(1, -1)$. Ces renseignements nous permettent de dire que la courbe présente en $(1, -1)$ une singularité de type "cusp".

5 Nappes paramétrées et surfaces de \mathbb{R}^3

5.1 Rappel sur le produit vectoriel

Soit $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Considérons deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} de \mathbb{R}^3 non co-linéaires. Rappelons que le vecteur

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

est le vecteur orthogonal à \vec{a} et \vec{b} , de norme $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| |\sin \theta|$, où θ est l'angle orienté compris entre \vec{a} et \vec{b} et tel que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b})$ forme une base directe de \mathbb{R}^3 . La norme $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$ est donc égale à l'aire du parallélogramme engendrée par \vec{a} et \vec{b} .

Le produit mixte

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}] = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{u} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$$

s'interprète comme le volume (avec signe) du parallélépipède engendré par les vecteurs \vec{a} , \vec{b} et \vec{u} .

5.2 Surfaces et nappes paramétrées

Une *surface* est une partie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, de la forme

$$\Sigma = \{\varphi(u, v) : u, v \in K\} \subset \mathbb{R}^3.$$

où φ est une application $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$, et $K = \overline{U}$ est un compact de \mathbb{R}^2 , égale à l'adhérence d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. L'application φ est une *paramétrisation* de Σ . On dit aussi que φ est une nappe paramétrée et que l'ensemble Σ est le support de la nappe.

Exemple 5.1. (paramétrisation d'un plan de \mathbb{R}^3) Soient \vec{a} et \vec{b} deux vecteurs de \mathbb{R}^3 non co-linéaires. Ces deux vecteurs engendrent un plan π passant par l'origine, qui est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 donné par $\pi = \{u(a_1, a_2, a_3) + v(b_1, b_2, b_3) : u, v \in \mathbb{R}\}$.

Si $\vec{P} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in \mathbb{R}^3$, alors le plan passant par \vec{P} et parallèle à π admet comme équation paramétrique

$$\varphi(u, v) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) + u(a_1, a_2, a_3) + v(b_1, b_2, b_3), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Ce même plan consiste en l'ensemble points $P = (x_1, x_2, x_3)$ tels que le vecteur \overrightarrow{PP} est orthogonal à $\vec{a} \wedge \vec{b}$. Ainsi,

$$(x_1, x_2, x_3) \in \pi \iff (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \overrightarrow{PP} = 0 \iff \det \begin{pmatrix} (x - \bar{x})_1 & (x - \bar{x})_2 & (x - \bar{x})_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 0.$$

La dernière égalité est l'équation cartésienne du plan passant par \bar{P} , de vecteurs directeurs \vec{a} et \vec{b} .

Exemple 5.2. La sphère centrée en O et de rayon R peut se paramétrer à l'aide de la longitude et de la co-latitude par l'application

$$(\phi, \theta) \mapsto (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta), \quad \phi \in [0, 2\pi[, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Posons $\varphi_u = (\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u})$ et $\varphi_v = (\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial v})$.

Définition 5.1. On dit qu'une paramétrisation $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ d'une surface Σ est régulière si φ est de classe C^1 , injective dans $\overset{\circ}{K}$, et, pour tout (u, v) à l'intérieur de K , les deux vecteurs de \mathbb{R}^3 $\varphi_u(u, v)$ et $\varphi_v(u, v)$ sont linéairement indépendants.

Justifions la définition précédente. Fixons $v = v_0$ et faisons varier le paramètre u . L'application $u \mapsto \varphi(u, v_0)$ définit une courbe paramétrée dans \mathbb{R}^3 , dont le support est contenu sur la surface Σ . De la même manière, si on fixe $u = u_0$ et on fait varier v , on obtient une autre courbe paramétrée $v \mapsto \varphi(u_0, v)$ sur la surface. Ces deux courbes admettent comme vecteurs tangents au point $P_0 = \varphi(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$ respectivement les vecteurs $\vec{a} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\vec{b} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$. Sous l'hypothèse de paramétrisation régulière, ces deux vecteurs sont linéairement indépendants et donc ils engendrent un plan dans \mathbb{R}^3 . Il s'agit du *plan tangent* à Σ au point P_0 .

Le plan tangent à Σ au point P_0 a donc pour équation paramétrique

$$(u, v) \mapsto \varphi(u_0, v_0) + u \varphi_u(u_0, v_0) + v \varphi_v(u_0, v_0), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Le *verseur normal* à une surface Σ paramétrée par $(u, v) \mapsto \varphi(u, v)$, au point $\varphi(u, v)$ est alors donnée par la formule

$$\vec{\nu}(u_0, v_0) = \frac{(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u_0, v_0)}{\|(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u_0, v_0)\|}.$$

Exemple 5.3. Le cylindre Σ de base le disque $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq R^2\}$ et hauteur infinie peut être paramétrée par

$$(\theta, z) : (\cos \theta, \sin \theta, z), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}.$$

Le plan tangent au cylindre au point $(\cos \theta_0, \sin \theta_0, z_0)$ est le plan paramétré par

$$(\theta, z) \mapsto (\cos \theta_0, \sin \theta_0, z_0) + \theta(-\sin \theta_0, \cos \theta_0, 0) + z(0, 0, 1).$$

L'équation cartésienne de ce plan est

$$0 = \det \begin{pmatrix} x - \cos \theta_0 & y - \sin \theta_0 & z - z_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0 - 1$$

Exemple 5.4. Le graphe d'une fonction de 2 variables f peut être paramétré par

$$(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)).$$

Le *verseur normal* au graphe est alors donné par la formule

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}(-f_x, -f_y, 1).$$

5.3 Aire d'une surface paramétrée et intégrale de surface

Considérons la surface Σ paramétrée par $(u, v) \mapsto \varphi(u, v)$, où $(u, v) \in K$. Considérons un grillage de K , le subdivisant en petits rectangles d'aire $du dv$, et soit R_0 l'un de ces rectangles, de sommets (u_0, v_0) , $(u_0 + du, v_0)$, $(u_0, v_0 + dv)$ et $(u_0 + du, v_0 + dv)$. L'application φ envoie R_0 en une petite portion de la surface $\varphi(R_0)$. Mais en appliquant la formule de Taylor d'ordre 1 (en négligeant le reste),

$$\varphi(u_0 + du, v_0) \simeq \varphi(u_0, v_0) + \varphi_u(u_0, v_0) du \quad \text{et} \quad \varphi(u_0, v_0 + dv) \simeq \varphi(u_0, v_0) + \varphi_v(u_0, v_0) dv.$$

Ainsi, la portion de surface $\varphi(R_0)$ est approximativement le parallélogramme construit à l'aide de vecteurs $\varphi_u(u_0, v_0) du$ et $\varphi_v(u_0, v_0) dv$, pointés en $\varphi(u_0, v_0)$. Ce parallélogramme est d'aire $\|(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u_0, v_0)\| du dv$. Ainsi la quantité

$$d\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} \|(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v)\| du dv$$

s'interprète comme un "élément infinitesimal d'aire" sur la surface. Cela conduit naturellement à la définition suivante :

$$\text{Aire}(\Sigma) = \int_K \|(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v)\| du dv.$$

Exemple 5.5. La formule précédente, appliquée à la sphère de rayon R , donne l'aire $A = 4\pi R^2$.

Définition 5.2. Soit $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, définie sur une surface Σ régulière, paramétrée par $(u, v) \mapsto \varphi(u, v)$, où $(u, v) \in K$. La quantité

$$\int_K f d\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} \int_K f(\varphi(u, v)) \|(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v)\| du dv$$

est l'intégrale de surface de f sur Σ .

Pour les nappes paramétrées, tout comme pour les courbes, on peut introduire la notion de paramétrisations équivalentes. On montre alors que l'intégrale de surface est indépendante de la paramétrisation choisie. En particulier (en considérant la fonction constante $f = 1$), l'aire d'une surface est indépendante de la paramétrisation choisie.

6 Le théorème des fonctions implicites

6.1 Le cas des fonctions de deux variables

Une courbe dans le plan est souvent donnée à l'aide d'une équation de la forme

$$F(x, y) = 0.$$

Le but de cette section est d'étudier les propriétés de telles courbes. À partir de l'équation $F(x, y) = 0$ il est parfois possible d'exprimer une variable en fonction de l'autre, par exemple $y = f(x)$. Dans ce cas la courbe d'équation $F(x, y) = 0$ est le graphe de la fonction f . Il peut être plus aisé d'exprimer x comme fonction de y : si l'on peut écrire $x = g(y)$ cela signifie que la courbe est le graphe de la fonction g .

Mais il y a des courbes qui ne sont pas (globalement) de graphes : c'est le cas, par exemple, du cercle centré en O de rayon 1, qui correspond aux solutions de l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Localement la situation est différente : si on fixe un point du cercle (x_0, y_0) il est possible de trouver un voisinage de ce point où le cercle est bien le graphe d'une fonction $y = f(x)$ et/ou $x = g(y)$: il s'agit de prendre la fonction $y = \sqrt{1 - x^2}$ (si $y_0 > 0$) ou la fonction $y = -\sqrt{1 - x^2}$ (si $y_0 < 0$) ; ou encore $x = \sqrt{1 - y^2}$ (si $x_0 > 0$) ou $x = -\sqrt{1 - y^2}$ (si $x_0 < 0$).

Étant donnée une courbe d'équation $F(x, y) = 0$, et un point (x_0, y_0) de cette courbe, quand est-ce qu'on peut dire que la courbe est (au moins localement) le graphe d'une fonction $y = f(x)$? La réponse est fournie par le théorème ci-dessous :

Théorème 6.1 (des fonctions implicites pour les fonctions de 2 variables). *Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Soit $(x_0, y_0) \in U$ tel que*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Alors il existe un voisinage I de x_0 , un voisinage J de y_0 et une fonction $f: I \rightarrow J$ tels que

$$\forall (x, y) \in I \times J: \quad F(x, y) = 0 \iff y = f(x).$$

Dans ce cas la fonction $x \mapsto f(x)$ est de classe C^1 et

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}, \quad (6.1)$$

où $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$ et $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$.

Revenons au cas de l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Les hypothèses sont satisfaites en tout point (x_0, y_0) du cercle, sauf aux points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$: au voisinage de ces deux points il n'est manifestement pas possible d'exprimer y comme fonction de x , mais il est possible d'exprimer x en fonction de y .

Remarque 6.1. En échangeant les rôles des variables x et y on trouve ceci : Si $(x_0, y_0) \in U$ est un point tel que

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Alors il existe un voisinage I de x_0 et un voisinage J de y_0 et une fonction $g: J \rightarrow I$ tels que

$$\forall (x, y) \in I \times J: \quad F(x, y) = 0 \iff x = g(y).$$

Dans ce cas la fonction $y \mapsto g(y)$ est de classe C^1 et $g'(y) = -\frac{F_y(g(y), y)}{F_x(g(y), y)}$.

Dém. du théorème. Nous pouvons supposer, par exemple $F_y(x_0, y_0) > 0$. Par la continuité de F_y , on a $F_y(x, y) > 0$ dans un rectangle $I \times J$. Posons $J = [y_0 - h, y_0 + h]$. La fonction $y \mapsto F(x_0, y)$ étant croissante dans J on a $F(x_0, y_0 - h) < 0$ et $F(x_0, y_0 + h) > 0$. Considérons les fonctions continues $x \mapsto F(x, y_0 - h)$ et $x \mapsto F(x, y_0 + h)$. Quitte à remplacer I par un intervalle centré en x_0 plus petit, pour $x \in I$ on a : $F(x, y_0 - h) < 0$ et $F(x, y_0 + h) > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à la fonction croissante $y \mapsto F(x, y)$ (avec x fixé), il existe un et un seul $y = f(x)$ tel que $F(x, f(x)) = 0$. La fonction f est ainsi construite.

Démontrons que f est de classe C^1 : Prenons $x, x_1 \in I$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction

$$\Phi(t) = F((1-t)x_1 + tx, (1-t)f(x_1) - tf(x)), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

on trouve

$$\exists \tau \in [0, 1]: \quad \Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\tau).$$

Considérons le point $P_\tau = ((1-\tau)x_1 + \tau x, (1-\tau)f(x_1) - \tau f(x))$, qui est un point sur le segment de $(x, f(x))$ à $(x_1, f(x_1))$. L'égalité précédente se réécrit

$$F(x, f(x)) - F(x_1, f(x_1)) = \Phi'(\tau) = (x - x_1)F_x(P_\tau) + (f(x) - f(x_1))F_y(P_\tau).$$

D'autre part, $F(x, f(x)) = F(x_1, f(x_1)) = 0$. Donc,

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = -\frac{F_x(P_\tau)}{F_y(P_\tau)}.$$

Si l'on prend $x_1 \rightarrow x$, on a $P_\tau \rightarrow (x, f(x))$. Mais comme F est de classe C^1 , on voit que f est dérivable et

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

L'expression à droite étant une fonction continue de x , on trouve que f est de classe C^1 . \square

La démonstration ci-dessus montre que si f est de classe C^k , alors f est de classe C^k .

Corollaire 6.2. *Si F est une fonction de classe C^1 au voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $\nabla F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, alors la courbe d'équation $F(x, y) = 0$ possède une droite tangente au point (x_0, y_0) et $\nu = \frac{\nabla F(x_0, y_0)}{\|\nabla F(x_0, y_0)\|}$ est le vecteur orthogonal la courbe d'équation $F(x, y) = 0$, au point (x_0, y_0) .*

Dém. En effet, au voisinage de (x_0, y_0) , la courbe est le graphe d'une fonction dérivable de la forme $y = f(x)$, ou éventuellement de la forme $x = g(y)$. Traitons, par exemple, le premier cas. Un point (x, y) appartient à la droite tangente si et seulement si $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, c'est à dire si et seulement si (d'après (6.1)) $(x - x_0)F_x(x_0, y_0) + (y - y_0)F_y(x_0, y_0) = 0$. Cela dit précisément que le vecteur $\nabla F(x_0, y_0)$ est orthogonale à $(x - x_0, y - y_0)$, c'est à dire orthogonale à la droite tangente. \square

Corollaire 6.3. *Si $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 , où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 , alors en tout point $(x_0, y_0) \in U$, $\nabla g(x_0, y_0)$ est orthogonal à la ligne de niveau de g passant par (x_0, y_0) .*

Dém. Si $\nabla g(x_0, y_0) = 0$ il n'y a rien à démontrer (le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs). Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, considérons la fonction $F(x, y) = g(x, y) - c$ où $c = g(x_0, y_0)$. On a $\nabla F(x_0, y_0) = \nabla g(x_0, y_0)$ et la ligne de niveau de g passant par (x_0, y_0) est l'ensemble d'équation $F(x, y) = 0$. Le résultat est alors une conséquence immédiate du corollaire précédent. \square

6.2 Le cas des fonctions de 3 variables

Si $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de 3 variables de classe C^1 , définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ et telle que, en un point $(x_0, y_0, z_0) \in U$ on a

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

alors il est possible, localement, d'exprimer z comme fonction de x et de y . Autrement dit, il existe un voisinage V de (x_0, y_0) , un voisinage J de z_0 et une fonction, de classe C^1 , $f: V \rightarrow J$ tels que

$$\forall (x, y, z) \in V \times J: \quad F(x, y, z) = 0 \iff z = f(x, y)$$

et dans ce cas

$$f_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))}, \quad f_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))}.$$

La démonstration est semblable à celle du théorème précédent et omise ici.

Dans ce cas la surface représentative du graphe de la fonction $z = f(x, y)$ possède, au point $(x, y, f(x, y))$, un vecteur normal donné par (voir l'exemple 5.4)

$$\nu = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}},$$

où toutes les dérivées sont calculées au point (x, y) . Supposons maintenant, par exemple, que $F_z(x_0, y_0, z_0) > 0$. Compte tenu des formules précédentes pour f_x et f_y , on trouve

$$\nu = \left(\frac{F_x}{\|\nabla F\|}, \frac{F_y}{\|\nabla F\|}, \frac{F_z}{\|\nabla F\|} \right) = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}. \quad (6.2)$$

Exemple 6.2. La fonction $F(x, y, z) = x^2 e^z + z e^y + y^2$ s'annule à l'origine. De plus $F_z(0, 0, 0) = 1$. Par conséquent, l'équation $F(x, y, z) = 0$ est, au voisinage de l'origine, le graphe d'une fonction $z = f(x, y)$. Cette fonction f est solution du système différentiel $f_x(x, y) = -\frac{2xe^{f(x,y)}}{x^2 e^{f(x,y)} + e^y}$ et $f_y(x, y) = -\frac{f(x,y)e^y + 2f(x,y)}{x^2 e^{f(x,y)} + e^y}$. De plus, on a $f(0, 0) = 0$ et $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$.

Observons que la formule (6.2) implique que, pour une fonction de 3 variables, le vecteur gradient est orthogonal, en tout point, à la surface de niveau passant par ce point. Cette affirmation se démontre comme dans le cas des fonctions de 2 variables (voir le corollaire 6.3). En généralisant à n variables, il n'est pas difficile de se convaincre alors de la validité de la proposition suivante :

Proposition 6.4. Soit Σ un ensemble de niveau d'une fonction g de n variables de classe C^1 , et $x_0 \in \Sigma$ un point tel que $g(x_0) = 0$, $\nabla g(x_0) \neq 0$. Alors le vecteur $\nabla g(x_0)$ est orthogonal à la surface Σ au point x_0 .

Traisons maintenant le cas de deux équations de la forme

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

où les fonctions F et G sont de classe C^1 au voisinage de $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. On se propose d'exprimer deux variables en fonction de la troisième, par exemple $y = f(x)$ et $z = g(x)$. Pour cela, commençons par supposer

$$F(P_0) = G(P_0) = 0, \quad F_z(P_0) \neq 0.$$

En appliquant ce qui a été vu au début de cette section on peut écrire, au voisinage de P_0 ,

$$F(x, y, z) = 0 \iff z = \varphi(x, y).$$

Considérons maintenant la fonction

$$\Phi(x, y) = G(x, y, \varphi(x, y)).$$

Au voisinage de P_0 on a

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = \varphi(x, y) \\ G(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = \varphi(x, y) \\ \Phi(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Observons que

$$\Phi_y = G_y + G_z \varphi_y = G_y - G_z \frac{F_y}{F_z}. \quad (6.4)$$

Maintenant, supposons que $0 \neq \Phi_y(x_0, y_0)$.

Dans ce cas nous pouvons exprimer y en fonction de x et écrire, au voisinage de (x_0, y_0) ,

$$\Phi(x, y) = 0 \iff y = f(x).$$

Cela donne alors, au voisinage de P_0 ,

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \iff y = f(x) \quad \text{et} \quad z = \varphi(x, f(x)) = g(x).$$

Pour arriver à cette conclusion nous avons eu besoin de supposer :

$$F(P_0) = G(P_0) = 0, \quad F_z(P_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \Phi_y(x_0, y_0) \neq 0. \quad (6.5)$$

Mais la formule précédemment donnée pour Φ_y montre que

$$\Phi_y(x_0, y_0) \neq 0 \iff \det \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \neq 0,$$

où

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{pmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{pmatrix}.$$

Observons par ailleurs que lorsque $\det \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \neq 0$, on ne peut avoir simultanément $F_z(P_0) = 0$ et $G_z(P_0) = 0$. Or, on a déjà vu que si $F_z(P_0) \neq 0$ on peut exprimer les solutions du système (6.3) par les relations $y = f(x)$ et $z = g(x)$. Si on revanche $F_z(P_0) = 0$ on doit avoir $G_z(P_0) \neq 0$ et en interchangeant les rôles de F et G on parvient à la même conclusion. Autrement dit, dans (6.5), la condition $F_z(P_0) \neq 0$ est superflue.

Les discussions précédentes nous conduisent à énoncer le théorème suivant.

Théorème 6.5 (Des fonctions implicites – 3 variables). *Soit F et G deux fonctions de classe C^1 au voisinage d'un point $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, tel que $F(P_0) = G(P_0) = 0$. Si la matrice*

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} F_x(P_0) & F_y(P_0) & F_z(P_0) \\ G_x(P_0) & G_y(P_0) & G_z(P_0) \end{pmatrix}.$$

*est de rang 2, alors il existe un voisinage de P_0 où le système (6.3) définit deux variables en fonction de la troisième. L'ensemble des solutions de (6.3) dans ce voisinage est alors le support d'une courbe régulière de \mathbb{R}^3 .**

Rappelons que les lignes d'une matrice 2×3 de rang 2 sont linéairement indépendantes. Sous les hypothèses du théorème précédent, on voit que les vecteurs $\nabla F(P_0)$ et $\nabla G(P_0)$ ne sont pas co-linéaires. Autrement dit, $\nabla F(P_0) \wedge \nabla G(P_0) \neq 0$. Mais le vecteur $\nabla F(P_0)$ est orthogonal en P_0 à la surface de niveau $F(x, y, z) = 0$. Et le vecteur $\nabla G(P_0)$ est orthogonal en P_0 à la surface de niveau $G(x, y, z) = 0$. L'hypothèse que la matrice est de rang 2 traduit alors le fait que ces deux surfaces n'ont pas le même plan tangent. La conclusion du théorème est que l'intersection des ces deux surfaces est bien une courbe.

6.3 Le théorème de l'inversibilité locale

Si U et V sont deux ouverts de \mathbb{R}^n et $x_0 \in U$. On dit que f est un difféomorphisme local en x_0 s'il existe un voisinage ouvert W de x_0 tel que $f: W \rightarrow F(W)$ soit un C^1 -difféomorphisme, c'est-à-dire une application bijective de classe C^1 telle que l'application inverse est de classe C^1 .

*. Par exemple, la courbe paramétrée par $x = x, y = f(x), z = g(x)$ si les deux dernière colonnes de la matrice sont linéairement indépendantes. Si le deux premières colonnes sont linéairement indépendantes on pourra expliciter x et y en fonction de z . Si la première et dernière colonne sont linéairement indépendantes, on écrira x et z comme fonction de y .

Pour qu'une fonction f soit un difféomorphisme local en x_0 il est nécessaire que la matrice jacobienne en x_0 soit inversible (c'est à dire de déterminant non nul, s'agissant d'une matrice carrée) En effet, on nous avons déjà vu que, en posant $y_0 = f(x_0)$,

$$J_{f^{-1}}(y_0) = \left(J_f(x_0) \right)^{-1}.$$

Le théorème suivant affirme que cette condition est aussi suffisante.

Exemple 6.3. La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est bijective et de classe C^1 . Mais cette fonction n'est pas un difféomorphisme local en $x = 0$. En effet, la matrice jacobienne est simplement le singleton $f'(0)$ et l'on a $f'(0) = 0$. Observons que l'application inverse est $f^{-1}(y) = y^{1/3}$ et f^{-1} n'est pas de classe C^1 au voisinage de $y = 0$.

Théorème 6.6 (de l'inversibilité locale). *Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^n , $x_0 \in U$ et $f: U \rightarrow V$. Si $\det(J_f(x_0)) \neq 0$, alors f est un difféomorphisme local en x_0 .*

Donnons juste l'idée de la démonstration pour les fonctions de deux variables : La formule de Taylor au premier ordre affirme que $f(x) - f(x_0)$ est approximativement égale à la différentielle df_{x_0} évalué en $(x - x_0)$, ou encore au produit de la matrice Jacobienne $J_{x_0}(f)$ par le vecteur $x - x_0$. Ainsi, et en négligeant le reste dans la formule de Taylor, $f(x) \simeq f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) = f(x_0) + J_f(x_0)(x - x_0)$. Mais le terme à droite est inversible si et seulement si $\det(J_f(x_0)) \neq 0$. On s'attent alors que dans un voisinage suffisamment petit de x_0 on puisse inverser f et que $f^{-1}(y) \simeq y_0 + (J_f(x_0))^{-1}(y - y_0)$.

La démonstration rigoureuse repose sur le théorème des fonctions implicites. Une démonstration alternative fait appel au théorème des contractions.

6.4 Extrema liés. Optimisation sous contrainte

Nous avons déjà étudié les problèmes d'optimisation de type

$$\min\{f(x): x \in U\} \quad \text{et} \quad \max\{f(x): x \in U\},$$

où l'ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ était un ouvert.

Dans cette section on s'intéresse aux problèmes analogues d'optimisation sur des ensembles fermés, par exemple,

$$\min\{f(x): x \in \Sigma\}, \quad \max\{f(x): x \in \Sigma\},$$

où Σ est un fermé de \mathbb{R}^n .

Nous considérons le cas particulier important où Σ est une surface de niveau d'une fonction continue $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (ou une ligne de niveau si $n = 2$). Sans perte de généralité on pourra alors supposer que

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n: g(x) = 0\}.$$

Le calcul de

$$\min\{f(x): g(x) = 0\}, \quad \text{et} \quad \max\{f(x): g(x) = 0\}, \quad (\text{P})$$

sont deux "problèmes d'optimisation avec contrainte égalité". Pour simplifier la présentation nous supposons que g est une fonction C^1 . Commençons par établir une propriété géométrique importante de l'ensemble Σ .

La condition $\nabla g(x_0) \neq 0$ exprime qu'en x_0 la contrainte n'est pas dégénérée. Voici un exemple de contrainte dégénéré : $xy = 0$ est une contrainte dégénéré à l'origine (observer que cette contrainte n'est pas une courbe mais plutôt l'intersection de deux courbes) à l'origine.

S'il n'y a avait pas la contrainte $g(x) = 0$, les solutions de ces problèmes d'optimisation seraient à chercher parmi les points stationnaires de la fonction f . Dans le cas d'une optimisation avec contrainte, comme c'est le cas pour les problèmes (P), la situation est différente :

Théorème 6.7 (des multiplicateurs de Lagrange). Soient f et g deux fonctions de classe C^1 au voisinage de $P_0 \in \mathbb{R}^n$. Si P_0 est un point tel que $g(P_0) = 0$, $\nabla g(P_0) \neq 0$ et P_0 est un minimiseur ou un maximiseur pour $f(x)$ sous la contrainte $g(x) = 0$, c'est à dire

$$f(P_0) = \min\{f(x) : g(x) = 0\}, \quad \text{ou} \quad f(P_0) = \max\{f(x) : g(x) = 0\},$$

alors $\nabla f(P_0)$ est parallèle à $\nabla g(P_0)$. Autrement dit,

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \nabla f(P_0) + \lambda_0 \nabla g(P_0) = 0.$$

On appelle le réel λ_0 le multiplicateur de Lagrange associé au problème d'optimisation.

Remarque 6.4. Dans le cas $\nabla f(P_0) \neq 0$, et pour les fonctions de 2 variables, la conclusion s'interprète ainsi : les lignes de niveau de f (la fonction à optimiser) et de g (la fonction qui donne la contrainte) tangentes au point P_0 . En effet, $\nabla f(P_0)$ et $\nabla g(P_0)$ sont, respectivement, orthogonaux à leurs lignes de niveau. De même, pour les fonctions de trois variables, les surfaces de niveau de f et de g sont tangentes en P_0 .

Dém. Nous donnons la démonstration uniquement pour les fonctions de 2 ou 3 variables.

- Le cas des fonction de deux variables. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un point où $g(x_0, y_0) = 0$ et $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$. Supposons, par exemple $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ (si $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, alors, par l'hypothèse sur g , $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ et l'on raisonne en intervertissant les variables x et y). Par le théorème des fonctions implicites, au voisinage de (x_0, y_0) on a $g(x, y) = 0 \iff y = \phi(x)$, où $\phi: I \rightarrow J$ et I et J sont des intervalles de \mathbb{R} , voisinages de x_0 et y_0 respectivement. En particulier, $\phi(x_0) = y_0$. Si $f(x_0, y_0) = \min\{f(x, y) : g(x, y) = 0\}$, ou si $f(x_0, y_0) = \max\{f(x, y) : g(x, y) = 0\}$, alors la fonction $\Psi(x) = f(x, \phi(x))$ possède respectivement un minimum ou un maximum local en x_0 . Dans les deux cas, $\Psi'(x_0) = 0$ par le principe de Fermat. Mais alors,

$$0 = \Psi'(x_0) = f_x(x_0, \phi(x_0)) + f_y(x_0, \phi(x_0))\phi'(x_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (1, \phi'(x_0)).$$

Le vecteur $\nabla f(x_0, y_0)$ est donc orthogonal au vecteur $(1, \phi'(x_0))$. Mais le vecteur $(1, \phi'(x_0))$ est tangent en (x_0, y_0) au graphe de la fonction ϕ , c'est-à-dire à la courbe $\{(x, y) : y = \phi(x)\} = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$. Ainsi, $\nabla f(x_0, y_0)$ est orthogonal à la courbe $\{(x, y) : g(x, y) = 0\}$. Mais $\nabla g(x_0, y_0)$ est lui même orthogonale à cette courbe par la proposition 6.4. Ainsi, $\nabla f(x_0, y_0)$ et $\nabla g(x_0, y_0)$ sont deux vecteurs parallèles.

- Le cas des fonctions de 3 variables. Soit $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. L'hypothèse sur g est $\nabla g(P_0) \neq 0$. Supposons, par exemple, $g_z(P_0) \neq 0$. On a $g(x, y, z) = 0$ au voisinage de P_0 si et seulement si $z = \phi(x, y)$ dans ce voisinage, où ϕ est une fonction de classe C^1 . La fonction $\Psi(x, y) := f(x, y, \phi(x, y))$ possède alors un extremum libre en (x_0, y_0) . Mais (x_0, y_0) est alors un point stationnaire pour Ψ et $\nabla \Psi(x_0, y_0) = 0$. En appliquant à ϕ des formules analogues (6.4) on trouve

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla \Psi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} (f_x - f_z g_x / g_z)(P_0) \\ (f_y - f_z g_y / g_z)(P_0) \end{pmatrix} = \frac{1}{g_z(P_0)} \begin{pmatrix} (f_x g_z - f_z g_x)(P_0) \\ (f_y g_z - f_z g_y)(P_0) \end{pmatrix}.$$

D'après la formule du produit vectoriel (5.1), cela implique que la première et la deuxième composante du vecteur $(\nabla f \wedge \nabla g)(P_0)$ s'annulent. Maintenant, si $g_x(P_0) = 0$ et $g_y(P_0) = 0$ alors la troisième composante de $(\nabla f \wedge \nabla g)(P_0)$ sera nulle également. Sinon, $g_x(P_0) \neq 0$ ou $g_y(P_0) \neq 0$ et on parvient à la même conclusion en raisonnant comme ci-dessus mais en échangeant les rôles des variables x , y et z . En conclusion $\nabla f \wedge \nabla g$ s'annule au point P_0 , ce qui se produit précisément lorsque $\nabla f(P_0)$ et $\nabla g(P_0)$ sont parallèles. □

Le théorème précédent admet la reformulation suivante : introduisons la Lagrangienne du problème d'optimisation, qui est la fonction de $n + 1$ variables

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x).$$

On a

$$\begin{cases} \nabla f(P_0) + \lambda_0 \nabla g(P_0) = 0 \\ g(P_0) = 0 \end{cases} \iff \nabla \mathcal{L}(x_0, \lambda_0) = 0,$$

où $\nabla_{x,\lambda} \mathcal{L}$ est le vecteur de $n + 1$ composantes $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}$.

Autrement dit, les solutions $P_0 \in \mathbb{R}^n$ du problème d'optimisation sous contrainte

$$\min\{f(x) : g(x) = 0\}, \quad \text{et} \quad \min\{f(x) : g(x) = 0\}, \quad (\text{P})$$

où f et g sont de classe C^1 au voisinage de P_0 et à valeur dans \mathbb{R} , sont à chercher parmi les points P_0 tels qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(P_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ est un point stationnaire de la Lagrangienne (vue comme fonction de $n + 1$ -variables). Les solutions du problème (P) sont aussi à chercher parmi les points où la contrainte $g(x) = 0$ est dégénérée. En conclusion, il s'agit alors de chercher les solutions de

$$\nabla_{x,\lambda} \mathcal{L}(x, \lambda) = 0, \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \nabla g(x) = 0 \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

Observer que ce théorème ne fournit qu'une condition nécessaire : ce théorème s'avère très utile pour trouver les points P_0 qui sont les bons candidats à être les solutions des problèmes d'optimisation avec contrainte. Mais sous les hypothèses du théorème, il peut arriver que (P_0, λ_0) soit un point stationnaire de \mathcal{L} , ou que $g(P_0) = 0$ et $\nabla g(P_0) = 0$, sans que P_0 soit ni un minimum, ni un maximum du problème d'optimisation.

Dispose-t-on de conditions suffisantes pour l'existence d'extrema avec contraintes ? La réponse est affirmative, mais n'insistons pas sur ce point. Bien souvent, on applique le théorème de Weierstrass pour démontrer que le minimum et/ou le maximum existent. Cela est possible notamment si la contrainte Σ définit un ensemble compact. *

Exemple 6.5. Trouvons le maximum et le minimum de la fonction $f(x, y, z) = x + y - \sqrt{6}z$ sur la sphère Σ de centre O et de rayon 1. Tout d'abord, f est une fonction continue et $\Sigma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$ est un compact de \mathbb{R}^3 . Donc, par le théorème de Weierstrass, les problèmes de minimisation et de maximisation posés possèdent bien des solutions. Ici, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Observons que la contrainte $g(x, y, z) = 0$ n'est jamais dégénérée, puisque le seul

*. Rappelons aussi la variante suivante du théorème de Weierstrass, qui s'applique (parfois) quand Σ n'est pas compact :

Théorème 6.8 (Weierstrass - variante). *Soit $f : \Sigma \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $\bar{x} \in \Sigma$ et si l'ensemble de sous-niveau $K = \{x \in \Sigma : f(x) \leq f(\bar{x})\}$ est compact, alors le problème de minimisation $\min_{x \in \Sigma} f(x)$ possède une solution. Autrement dit, il existe $x^* \in D$ tel que $f(x^*) = \min_{x \in \Sigma} f(x)$.*

Le cas typique d'application est celui d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Une telle fonction a tous les ensembles de sous-niveau bornés (pourquoi?). Si de plus f est continue, ses ensembles de sous-niveau sont fermés (pourquoi?) et donc compacts. La fonction possède alors un minimum absolu.

Bien entendu on peut établir un théorème analogue pour l'existence d'un maximum absolu : il s'agit cette fois-ci de supposer que l'ensemble de "sur-niveau" $\{x : f(x) \geq f(\bar{x})\}$ est borné. Le cas typique d'application est celui d'une fonction continue telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

point où ∇g s'annule est l'origine, mais l'origine ne vérifie pas la contrainte. Ainsi, les points de minimum et maximum sont à chercher parmi les points stationnaires de la Lagrangienne. La Lagrangienne du système est la fonction $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x + y - \sqrt{6}z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Ses points stationnaires sont les solutions du système

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ -\sqrt{6} + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

En exprimant x, y, z en fonction de λ , la quatrième équation donne $\lambda = \pm\sqrt{2}$ et ensuite $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = \pm(1/2\sqrt{2}, 1/2\sqrt{2}, -\sqrt{6}/2\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Les solutions des problèmes de minimisations et maximisation (dont l'existence a été établie avant via le théorème de Weierstrass) sont alors à chercher parmi les points $P = (1/2\sqrt{2}, 1/2\sqrt{2}, -\sqrt{6}/2\sqrt{2})$ et $Q = (-1/2\sqrt{2}, -1/2\sqrt{2}, +\sqrt{6}/2\sqrt{2})$. Mais un calcul direct montre que $f(P) > f(Q)$. Ceci permet de dire que f atteint sur la sphère son maximum en P et son minimum en Q .

Même si le théorème des multiplicateurs de Lagrange est un outil puissant, il convient parfois ne pas l'utiliser, notamment s'il est possible d'éliminer la contrainte en exprimant une variable en fonction des autres :

Exemple 6.6. Optimiser $x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $x + 2y + 3z = 1$. Interpréter le résultat. Solution. La lagrangienne du système est $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + 2y + 3z - 1)$. Son unique point stationnaire, obtenu avec le multiplicateur $\lambda = -1/7$, est $(1/14, 1/7, 3/14)$. La contrainte n'étant pas compacte le théorème de Weierstrass ne s'applique pas. Appliquons la variante du théorème de Weierstrass. Choisissons un point arbitraire sur la contrainte, par exemple $(0, 0, 1/3)$. L'ensemble de sous-niveau $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1/9\}$ est manifestement compact (c'est la boule fermée de rayon $1/3$ et centre $1/3$). Le problème posé possède alors un minimum absolu. Le point $(1/14, 1/7, 3/14)$ est donc l'optimum demandé et il s'agit d'un minimum. Il s'agit du point du plan d'équation $x + 2y + 3z = 1$ à distance minimale de l'origine.

Exemple 6.7. On cherche à construire un caisson de 20m^3 . Le matériau pour le fond coûte 3 euros/ m^2 , pour le couvercle 2 euros/ m^2 et pour les côtés 1 euro/ m^2 . Quel est le caisson le moins cher ? Et le plus cher ?

Réponse :

- *Modélisation* : Notons x (=longueur), y (=largeur), z (=hauteur) les mesures du caisson en mètres. Le coût de construction est $C(x, y, z) = 3xy + 2xy + 2(xz + yz) = 5xy + 2xz + 2yz$. Il s'agit de résoudre les problèmes de minimisation et maximisation pour C "avec contrainte" : $\min\{C(x, y, z) : xyz = 20\}$ et $\max\{C(x, y, z) : xyz = 20\}$.
- *Élimination de la contrainte et recherche des points stationnaires* : On pourrait introduire la Lagrangienne et en déterminer les points stationnaires (cela conduit à résoudre un système de 4 équations et 4 inconnues). Mais il est plus aisé de poser $z = 20/(xy)$ et d'étudier la fonction

$$f(x, y) = C(x, y, \frac{20}{xy}) = 5xy + 40(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}), \quad x > 0, y > 0.$$

La fonction f étant définie sur un ouvert, il s'agit d'en trouver les points stationnaires : Cela conduit à résoudre le système (de deux équations et 2 inconnues) $\nabla f(x, y) = 0$. Ce système possède une seule solution pour $x > 0$ et $y > 0$. Elle est donnée par $x = y = 2$ (et donc $z = 5$).

- *Synthèse* : On construit donc un caisson de mesures $2 \times 2 \times 5$. Ce choix correspond-t-il au caisson de coût minimum, maximum, ou ni l'un ni l'autre ? Le problème de minimisation est-il *bien posé* ? Et celui de maximisation ? Pour répondre à ces questions appliquons la variante du théorème de Weierstrass avec $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ (ce choix est arbitraire). Observons que l'ensemble de sous-niveau $K = \{(x, y) : f(x, y) \leq f(1, 1)\} = 5xy + 40(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}) \leq 85\}$ est compact (en effet, il est manifestement fermé et il est borné, puisque $x \geq 40/85$, $y \geq 40/85$ et $5xy \leq 85 \Rightarrow x \leq 17 \cdot 85/40$ et $y \leq 17 \cdot 85/40$). Mais alors le problème de minimisation de l'exemple 6.7 est bien posé, c'est-à-dire que le caisson de coût minimum existe : c'est bien le caisson de mesures $2 \times 2 \times 5$ trouvé avant. Le problème de maximisation est mal posé : le caisson de coût maximum n'existe pas. On le voit en observant que des caissons de mesures $x, x, 20/x^2$ ont un coût qui tend à l'infini si $x \rightarrow +\infty$.

Optimisation sous plusieurs contraintes. Le théorème des multiplicateurs de Lagrange se généralise au cas où il y a plusieurs contraintes à satisfaire. Considérons par exemple le problème

$$\min\{f(x) : g_1(x) = 0, g_2(x) = 0\}, \quad \text{ou} \quad \max\{f(x) : g_1(x) = 0, g_2(x) = 0\} \quad (x \in \mathbb{R}^n, n \geq 3).$$

où f , g_1 et g_2 sont des fonctions de classe C^1 . On introduit dans ce cas la Lagrangienne de $(n+2)$ -variables $\mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2)$, où

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x).$$

On peut démontrer que les points x_0 de minimum ou maximum de f sous les contraintes $g_1(x) = g_2(x) = 0$ sont à chercher parmi les points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $(x, \lambda_1, \lambda_2)$ est un point stationnaires de la Lagrangienne. Ainsi, pour trouver ces points (ou du moins des points candidats à être des solutions du problème d'optimisation), on commence par trouver les solutions du système de $n+2$ équations

$$\nabla_{x, \lambda_1, \lambda_2} \mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2) = 0. \tag{6.6a}$$

Mais comme on l'a vu avant, un autre cas de figure est possible : celui où la contrainte $g_1(x) = g_2(x) = 0$ est dégénérée : ainsi les solutions du problèmes d'optimisation sont aussi à chercher parmi les éventuelles solutions des systèmes

$$\begin{cases} \nabla g_1(x) = 0 \\ g_1(x) = g_2(x) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \nabla g_2(x) = 0 \\ g_1(x) = g_2(x) = 0 \end{cases} \tag{6.6b}$$

Dans la plupart des cas la contrainte ne sera pas dégénérée et les systèmes (6.6b) n'ont pas de solution.

Bien entendu, ces considérations se généralisent à un nombre arbitraire de contraintes.

7 Espaces métriques complets

7.1 Quelques rappels sur les espaces métriques

- Un *espace métrique* est un couple (X, d) formé par un ensemble et une distance (mais on écrira souvent seulement X pour simplifier). Les éléments de X s'appellent *points*. Par définition, un *distance* (ou *métrique*) sur X est une application $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, telle que, pour tout x, y et $z \in X$,

$$\text{i) } d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad \text{ii) } d(x, y) = d(y, x), \quad \text{iii) } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

- Pour $r > 0$ et $x \in X$, la boule centrée en x et de rayon $r > 0$ est l'ensemble $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$. Dans un espace métrique, un ensemble U est dit *ouvert* si, pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Un ensemble est dit *fermé* si son complémentaire dans X est un ensemble ouvert.
- Une suite dans un espace métrique X est une application $\mathbb{N} \rightarrow X$. Elle est notée généralement $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (x_n) .
Soit (x_n) une suite d'un espace métrique (X, d) et $x \in X$. On dit la suite (x_n) converge vers x , et on écrit $x_n \rightarrow x$ ou encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ si, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $x_n \in B(x, \epsilon)$ (autrement dit, $d(x_n, x) < \epsilon$). Si la suite ne converge vers aucun point, on dit qu'elle *diverge*. Dans le cas général on voit que $x_n \rightarrow x \iff d(x_n, x) \rightarrow 0$.
Le "théorème d'unicité de la limite" affirme que si on a une suite telle que $x_n \rightarrow x$ et $x_n \rightarrow y$, alors $x = y$.
- L'adhérence \bar{A} d'une partie A d'un espace métrique X est le plus petit fermé contenant A . Un point $x \in \bar{A}$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n) \subset A$ telle que $x_n \rightarrow x$.
- Une application $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ est continue en x si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$. La continuité peut se caractériser par les suites : f est continue en x si et seulement si pour toute suite (x_n) convergente vers x on a $f(x_n)$ convergente vers $f(x)$.
- Une application $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ entre deux espaces métriques est dite k -lipschitzienne (où $k \geq 0$) si et seulement si, pour tout $x, x' \in X$ on a $d_Y(f(x), f(x')) \leq k d_X(x, x')$. Elle est dite lipschitzienne s'il existe $k \geq 0$ telle qu'elle est k -lipschitzienne. Les applications lipschitziennes sont continues.

7.2 Suites de Cauchy et espaces complets

Définition 7.1. Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n) \subset X$ est **de Cauchy** si $\forall \epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq n_0$ on a $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Proposition 7.1. 1. Si (x_n) converge, alors (x_n) est une suite de Cauchy.
2. Toute suite de Cauchy est bornée.

Dém. 1.) Si $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ et $\epsilon > 0$, il existe un n_0 tel que $d(x_n, x) < \epsilon/2$ si $n \geq n_0$. Si $m, n \geq n_0$, on trouve alors $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \epsilon$.

2.) Pour la démonstration de la seconde affirmation, il suffit d'appliquer la définition de suite de Cauchy avec $\epsilon = 1$. On trouve qu'il existe n_0 tel que, pour tout $m \geq n_0$ on a $d(x_m, x_{n_0}) \leq 1$. Mais alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $d(x_m, x_{n_0}) \leq R$, où $R = \max_{0 \leq i \leq n_0} d(x_i, x_{n_0}) + 1$. \square

Exemple 7.1. Dans l'espace métrique (\mathbb{Q}, d) , où $d(x, y) = |x - y|$ est la distance euclidienne, considérons la suite (x_n) définie par $x_n = E(2^n \sqrt{2})/2^n$ (où $E(\alpha)$ désigne la partie entière du nombre réel α , c'est à dire le plus grand entier inférieur ou égale à α). Il s'agit bien d'une suite de nombres rationnels. Cette suite converge vers l'irrationnel $\sqrt{2}$. On conclut que la suite (x_n) est de Cauchy dans (\mathbb{Q}, d) , et qu'elle est divergente dans (\mathbb{Q}, d) .

Définition 7.2. Un espace métrique (X, d) est **complet** si et seulement si toute suite de Cauchy $(x_n) \subset X$ est convergente dans X .

Un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est **de Banach** si et seulement si E est complet pour la distance associée à $\|\cdot\|$.

Exemple 7.2. \mathbb{Q} muni de la distance usuelle dans \mathbb{R} n'est donc pas complet, comme l'exemple précédent le montre. L'intervalle $]0, +\infty[$ est un autre exemple d'espace métrique non complet (considérer la suite $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, qui est de Cauchy, pour le voir).

Théorème 7.2. \mathbb{R} est complet.

Dém. * Soit (x_n) une suite réelle de Cauchy. Soient $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, $a_n = \inf A_n$, $b_n = \sup A_n$. On a $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, car A_n est borné. Clairement, $a_n \leq b_n$, (a_n) est croissante, (b_n) décroissante. Soit $\epsilon > 0$. Il existe un n_0 tel que $|x_n - x_m| < \epsilon/2$ si $n, m \geq n_0$. Pour $n \geq n_0$, on a donc $A_n \subset [x_{n_0} - \epsilon/2, x_{n_0} + \epsilon/2]$, ce qui implique $x_{n_0} - \epsilon/2 \leq a_n \leq b_n \leq x_{n_0} + \epsilon/2$; d'où $b_n - a_n \leq \epsilon$. Il s'ensuit que les suites (a_n) , (b_n) sont adjacentes. Par conséquent, il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow a$. Comme $a_n \leq x_n \leq b_n$, on trouve $x_n \rightarrow a$. \square

Proposition 7.3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors \mathbb{R}^k , muni de la distance euclidienne, est complet.

Dém. Soit $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de vecteurs de \mathbb{R}^k . On a $x^n = (x_1^n, \dots, x_k^n)$. Mais, pour $j = 1, \dots, k$, on a $d(x_j^n, x_j^m) \leq \|x^n - x^m\|_2$. Fixons l'indice j : il s'ensuit que $(x_j^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} , qui est complet et qu'alors cette suite converge vers une limite x_j . Mais alors $x_j^n \rightarrow x_j$ pour tout $j = 1, \dots, k$. Posons $x = (x_1, \dots, x_k)$. La suite de vecteurs x^n converge composante par composante vers le vecteur $x \in \mathbb{R}^k$. Mais alors $x^n \rightarrow x$ dans \mathbb{R}^k . \square

7.3 Relation entre espaces complets et fermés

Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.

Proposition 7.4. a) Si (A, d) est complet, alors A est un fermé de X .

b) Si (X, d) est complet et A est un fermé de X , alors (A, d) est complet.

Dém. a) Soit $a \in \overline{A}$. Il existe $(x_n) \subset A$ telle que $x_n \rightarrow a$. Alors (x_n) est une suite de Cauchy, donc convergente (dans A , puisque A est complet) vers un $b \in A$. L'unicité de la limite (dans X) implique $a = b \in A$. Il s'ensuit que $\overline{A} \subset A$, d'où A fermé.

b) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans A . Alors il existe un $a \in X$ tel que $x_n \rightarrow a$. Il s'ensuit que $a \in A$, et donc (x_n) converge dans A . \square

Corollaire 7.5. Dans un espace métrique complet, A complet si et seulement si A fermé.

7.4 L'espace des fonctions continues et bornées

Définition 7.3. Soit (X, d) un espace métrique. Une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite bornée si son image $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ est une partie bornée de \mathbb{R} . On désigne

$$C_b(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ continue et bornée}\}.$$

Observons que si K est compact, alors toutes les fonctions continues sont bornées par le théorème de Weierstrass. Donc $C_b(K, \mathbb{R}) = C(K, \mathbb{R})$.

La somme de deux fonctions continues et bornée est une fonction continue et bornée. Et si on multiplie une fonction continue et bornée par un nombre réel on obtient une autre fonction continue et bornée. Donc $C_b(X, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Nous définissons la "norme du sup" sur $C_b(X, \mathbb{R})$ par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Il n'est pas difficile de voir que $C_b(X, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel normé, pour la norme du sup.

On définit une distance δ sur l'ensemble $C_b(X, \mathbb{R})$ (dite "distance du sup"), par

$$\forall f, g \in C_b(X, \mathbb{R}) : \quad \delta(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

La norme $\|\cdot\|_\infty$ induit bien entendu la distance δ par la relation usuelle $\delta(f, g) = \|f - g\|_\infty$.

*. Cette démonstration suppose connu le fait que deux suites réelles adjacentes convergent. Par définition, deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes lorsque $a_n \leq b_n$, (a_n) croissante, (b_n) décroissante et $b_n - a_n \rightarrow 0$.

Exemple 7.3. Si $X = [0, 1]$, les fonctions $f(x) = \exp(x)$ et $g(x) = \exp(2x)$ appartiennent à $C_b([0, 1], \mathbb{R}) = C([0, 1], \mathbb{R})$. Calculons la distance entre ces deux fonctions f et g : on a

$$\delta(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |e^x - e^{2x}| = \max_{x \in [0, 1]} (e^{2x} - e^x) = e^2 - e.$$

Si une suite de fonctions $(f_n) \subset C_b(X, \mathbb{R})$ converge vers $f \in C_b(X, \mathbb{R})$, c'est à dire $f_n \xrightarrow{\delta} f$, on dit que (f_n) converge *uniformément* vers f . Plus explicitement, cela signifie que

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

Exemple 7.4. Soit $X = [0, 1]$ et $f_n(x) = e^{x/n}$. Pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) \rightarrow 1$. Soit f la fonction constante égal à 1. On a, pour tout $x \in [0, 1]$, $|f_n(x) - f(x)| = |e^{x/n} - 1| \leq e^{1/n} - 1$. Donc $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq e^{1/n} - 1 \rightarrow 0$. On conclut que $\delta(f_n, f) \rightarrow 0$.

Observons que, parfois, l'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$ (autrement dit, on a *convergence simple* de (f_n) vers f) sans qu'il y ait convergence uniforme.

Proposition 7.6.

1. La limite uniforme de fonctions continues et bornées est continue et bornée : autrement dit, si $(f_n) \subset C_b(X, \mathbb{R})$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que $f_n \xrightarrow{\delta} f$, alors $f \in C_b(X, \mathbb{R})$.
2. $C_b(X, \mathbb{R})$ est un espace métrique complet pour la distance du sup. Il s'agit donc d'un espace de Banach.

Dém. (1). Soit $f_n \xrightarrow{\delta} f$ et $x \in X$. Pour démontrer que f est continue en x on considère $\epsilon > 0$. On sait alors qu'il existe n_0 tel que $\delta(f, f_n) < \epsilon/3$ pour tout $n \geq n_0$. On a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x')| + |f_n(x') - f(x')| \\ &\leq 2\delta(f, f_n) + |f_n(x) - f_n(x')| \\ &\leq 2\epsilon/3 + |f_n(x) - f_n(x')|. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité ci-dessus avec $n = n_0$ et le fait que f_{n_0} est continue en x , on trouve qu'il existe $\eta > 0$ tel que, si $d(x, x') < \eta$, alors $\delta(f, f_n) < \epsilon/3$ et donc $|f(x) - f(x')| < \epsilon$. Ceci assure que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est bien continue.

De plus, en appliquant la définition de convergence avec $\epsilon = 1$, on voit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \\ &\leq \delta(f, f_{n_0}) + |f_{n_0}(x)| \\ &\leq 1 + |f_{n_0}(x)|. \end{aligned}$$

Si l'on passe au sup,

$$\sup_{x \in X} |f(x)| \leq 1 + \sup_{x \in X} |f_{n_0}(x)| < \infty$$

puisque f_{n_0} est une fonction bornée et donc f est elle même bornée.

(2). Si (f_n) est une suite de Cauchy dans $C_b(X, \mathbb{R})$, alors, pour tout $x \in X$, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} . On pose $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe un n_0 tel que, si $n, m \geq n_0$, alors $\delta(f_n, f_m) < \epsilon/2$. Pour tout $x \in X$, on a donc alors $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon/2$ si $n \geq n_0$. Passons à la limite dans cette inégalité pour $m \rightarrow +\infty$. Ceci donne $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon/2$ pour $n \geq n_0$. Mais alors $\delta(f_n, f) \leq \epsilon/2 < \epsilon$ pour $n \geq n_0$. Il s'ensuit $f_n \xrightarrow{\delta} f$. \square

Comme application immédiate de la proposition précédente (avec $X = [a, b]$), nous avons que l'ensemble $C([a, b], \mathbb{R})$ des applications continues sur un intervalle $[a, b]$ et à valeurs réelles est complet pour la distance du sup.

Une autre application intéressante est fournie par la proposition suivante.

Proposition 7.7. *On désigne avec ℓ^∞ l'espace vectoriel de toutes les suites réelles bornées : $\ell^\infty = \{x = (x_n) \subset \mathbb{R} ; (x_n) \text{ bornée}\}$. On munit ℓ^∞ de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$. Alors ℓ^∞ est un espace de Banach pour la distance induite de la norme $\|\cdot\|_\infty$.*

Dém. On a $\ell^\infty = C_b(\mathbb{N}, \mathbb{R})$: en effet, on peut voir une suite (bornée) comme une fonction : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (bornée) et réciproquement. D'autre part, toute fonction : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue (il suffit d'appliquer la définition de continuité avec $\epsilon < 1/2$ pour s'en convaincre). Mais alors le résultat de cette proposition est une conséquence immédiate de celle de la proposition précédente avec $X = \mathbb{N}$. \square

7.5 Contractions et le théorème du point fixe

Définition 7.4. *Une application $f : (X, d) \rightarrow (Y, D)$ est contractante s'il existe un $k < 1$ tel que f soit k -lipschitzienne.*

Exemple 7.5. L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \arctan(\frac{x}{2})$ est contractante. En effet, pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$ (on pourra supposer $x < x'$) on a, par l'inégalité des accroissements finis, $|f(x) - f(x')| \leq \sup_{\xi \in [x, x']} |f'(\xi)| |x - x'| \leq \sup_{\xi \in [x, x']} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(\xi/2)^2} |x - x'| \leq \frac{1}{2} |x - x'|$. Cette fonction est alors $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur \mathbb{R} .

Définition 7.5. *Si $f : X \rightarrow X$, un point fixe de f est une solution de l'équation $f(x) = x$.*

Théorème 7.8 (du point fixe de Picard). *Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ contractante. Alors :*

- a) *f possède exactement un point fixe a ;*
- b) *pour tout $x_0 \in X$, la suite (x_n) , $x_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}(x_0)$, converge vers a ;*

Dém. a) Soit $0 < k < 1$ tel que f soit k -lipschitzienne. Montrons que f a au plus un point fixe : si, par l'absurde, a et b sont des points fixes et $a \neq b$, on aboutit à la contradiction $0 < d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a, b) < d(a, b)$.

L'existence de a suit de b) : si la suite (x_n) converge et si a est tel que $x_n \rightarrow a$, alors $x_{n+1} = f(x_n) \rightarrow f(a)$ (puisque toute fonction lipschitzienne est continue), d'où $f(a) = a$.

b) On a, pour tout n , $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$ (par récurrence sur n). Par conséquent, si $m \geq n$, alors

$$(1) \quad d(x_m, x_n) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) = Ck^n.$$

Comme $Ck^n \rightarrow 0$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un n_0 tel que $Ck^n < \epsilon$ si $n \geq n_0$. Il s'ensuit que $d(x_m, x_n) < \epsilon$ si $m, n \geq n_0$. La suite (x_n) étant de Cauchy, elle converge vers un $a \in X$. De ce qui précède, a est l'unique point fixe de f . \square

Exemple 7.6. Trouver le nombre des solutions de l'équation $\cos x = x$.

On a $\cos x = x \Rightarrow x \in [-1, 1]$. Soit $f : X = [-1, 1] \rightarrow X$, $f(x) = \cos x$. $[-1, 1]$ est complet (avec la distance usuelle), car fermé dans \mathbb{R} . Par ailleurs, on a $|f'(x)| \leq \sin 1 < 1$, $x \in X$. Le théorème des accroissements finis implique $|f(x) - f(y)| \leq \sin 1 |x - y|$, $x, y \in X$. Il s'ensuit que l'équation $\cos x = x$ a exactement une solution.

8 Équations différentielles linéaires

8.1 Fonctions vectorielles et matricielles

Introduisons quelques notations. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note dans ce chapitre $|x|$ la norme euclidienne de x , à savoir

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Cette notation est compatible avec celle de valeur absolue, lorsque $n = 1$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice réelle carrée $n \times n$, on peut l'identifier à un vecteur de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Il est alors cohérent de noter, si $A = (a_{i,j})$,

$$|A| = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On note $C_b(I, \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions vectorielles bornées $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$. On munit cet espace de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|.$$

Aussi, si $A \in C_b(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ est une fonction matricielle bornée, on notera alors

$$\|A\|_\infty = \sup_{t \in I} |A(t)|.$$

Exemple 8.1. Si $A \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ est la fonction matricielle définie par $A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\|A\|_\infty = \sqrt{17}$.

Proposition 8.1.

1. Si A une matrice $n \times n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Alors, $|Ax| \leq |A| |x|$.
2. Si $A \in C_b(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $f \in C_b(I, \mathbb{R}^n)$, alors $Af \in C_b(I, \mathbb{R}^n)$ et $\|Af\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|f\|_\infty$.

Dém. En effet, si on note A_i les vecteurs ligne de la matrice A

$$\begin{aligned} |Ax| &= |(A_1 \cdot x, \dots, A_n \cdot x)| = \left(\sum_{i=1}^n |A_i \cdot x|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |A_i|^2 |x|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2} |x| = |A| |x|. \end{aligned}$$

Pour la seconde affirmation il suffit d'écrire, pour tout $t \in I$, $|A(t)f(t)| \leq |A(t)| |f(t)|$ et passer au sup sur la variable t . \square

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle, on note $f = (f_1, \dots, f_n)$ où $f_i: I \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ sont les composantes de f . Rappelons que, par définition, on dit que f est dérivable (resp. intégrable) si et seulement si toutes ses composantes f_1, \dots, f_n sont dérivables (resp. intégrables). Dans ce cas, on pose

$$f' = (f'_1, \dots, f'_n)$$

et, si $I = [a, b]$,

$$\int_a^b f = \left(\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n \right).$$

En appliquant à la norme euclidienne la remarque ??, on voit que si f est une fonction vectorielle Riemann-intégrable, alors la fonction scalaire $|f|$ l'est aussi et

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

De la même manière, si $t \mapsto M(t)$ et $t \mapsto N(t)$ sont deux fonctions matricielles dérivables alors

$$(MN)'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t). \quad (8.1)$$

Le produit de matrices n'étant pas commutatif, l'ordre des facteurs ici est important.

8.2 Systèmes différentiels linéaires et équations de Volterra

Dans toute cette section nous supposons systématiquement que I est un intervalle de \mathbb{R} , $A \in C(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $B \in C(I, \mathbb{R}^n)$.

Définition 8.1. *Un système différentiel d'ordre n (ou équation différentielle vectorielle) linéaire sur l'intervalle I est une équation de la forme*

$$U'(t) = A(t)U(t) + B(t), \quad (E)$$

où l'inconnue $U: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction dérivable. Si $B(t) = 0$ pour tout $t \in I$ on dit que le système est « homogène ». Si la fonction matricielle A est indépendante de t on dit que le système est « à coefficients constants ».

Il serait plus correct d'appeler « affines » ces systèmes différentiels, mais ce n'est pas la terminologie couramment adoptée.

Exemple 8.2. Le système différentiel homogène et à coefficients constants

$$\begin{cases} u'(t) = -v(t) \\ v'(t) = u(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

admet comme solutions (par exemple) les fonction $u(t) = r \cos(t)$ et $v(t) = r \sin(t)$, $r \in \mathbb{R}$. Ici le système est de la forme vectorielle (E), avec $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Un « problème de Cauchy linéaire » est la donnée d'un système différentiel linéaire et d'une « condition initiale » :

$$\begin{cases} U'(t) = A(t)U(t) + B(t) \\ U(t_0) = U_0. \end{cases} \quad (P)$$

Ici $t_0 \in I$ et $U_0 \in \mathbb{R}^n$ est donnée.

Définition 8.2. *Une équation de Volterra linéaire est une équation de la forme*

$$U(t) = U_0 + \int_{t_0}^t [A(s)U(s) + B(s)] ds, \quad t \in I. \quad (V)$$

Ici, $U: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est l'inconnue et $A: I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B: I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ici, $t_0 \in I$ et $U_0 \in \mathbb{R}^n$ est donnée.

Il est parfois utile de ramener l'étude d'un problème de Cauchy à une équation intégrale. Ceci est toujours possible, puisqu'un problème de Cauchy est équivalent à l'équation de Volterra correspondante :

Proposition 8.2. Soit I un intervalle et $t_0 \in I$. Soit $U_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\begin{cases} U \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \\ U'(t) = A(t)u(t) + B(t) \quad \forall t \in I \\ U(t_0) = U_0 \end{cases} \iff \begin{cases} U \in C(I, \mathbb{R}^n) \\ U(t) = U_0 + \int_{t_0}^t [A(s)U(s) + B(s)] ds \quad \forall t \in I. \end{cases}$$

Dém. Pour l'implication \Rightarrow il suffit d'intégrer terme-à-terme l'équation différentielle. Pour l'implication \Leftarrow , on observe d'abord que $s \mapsto A(s)U(s) + B(s)$ est une application continue, donc sa fonction intégrale est de classe C^1 . Mais alors U est de classe C^1 et la conclusion s'obtient en dérivant terme-à-terme. \square

Pour chercher une solution U à l'équation linéaire de Volterra, on introduit la fonction

$$\Phi: C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n),$$

où, pour tout $U \in C(I, \mathbb{R}^n)$, $\Phi(U)$ est l'application définie par

$$\forall t \in I, \quad \Phi(U)(t) = U_0 + \int_{t_0}^t [A(s)U(s) + B(s)] ds.$$

Ainsi, U est solution de l'équation de Volterra si et seulement si

$$\forall t \in I \quad U(t) = \Phi(U)(t),$$

En conclusion

$$\begin{cases} U \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \\ U'(t) = A(t)u(t) + B(t) \quad \forall t \in I \\ U(t_0) = U_0 \end{cases} \iff \begin{cases} U \in C(I, \mathbb{R}^n) \\ U = \Phi(U) \quad (\text{c'est à dire, } U \text{ point fixe pour } \Phi). \end{cases}$$

Lemme 8.3. Soit $a < b$ et $I = [a, b]$. Sous les hypothèses précédentes sur A et B , pour tout $U, V \in C(I, \mathbb{R}^n)$,

$$\|\Phi(U) - \Phi(V)\|_\infty \leq |b - a| \|A\|_\infty \|U - V\|_\infty.$$

Dém. En effet, pour tout $t \in [a, b]$,

$$|\Phi(U)(t) - \Phi(V)(t)| \leq \int_{t_0}^t |A(s)| |U(s) - V(s)| ds \leq |b - a| \|A\|_\infty \|U - V\|_\infty.$$

\square

En particulier, grâce au théorème des contractions nous pouvons déjà établir le résultat suivant. (Nous ferons mieux un peu plus loin).

Corollaire 8.4. Soit $a < b$ et $t_0 \in [a, b]$. Supposons $A \in C([a, b], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $B \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$. On suppose $|b - a| \|A\|_\infty < 1$. Le problème de Cauchy linéaire

$$\begin{cases} U'(t) = A(t)U(t) + B(t), \\ U(t_0) = U_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

possède une et une seule solution $U \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Dém. La conclusion est immédiate, puisque le lemme précédent assure que Φ est une contraction sur $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, qui est un espace de Banach. Alors Φ possède un et un seul point fixe $u \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$. Ce point fixe u est l'unique solution du problème de Cauchy (P). \square

Proposition 8.5. *Si \vec{v} et \vec{w} sont deux solutions définies sur I d'un même problème de Cauchy (P), alors $\vec{v} = \vec{w}$.*

Dém. Si \vec{v} et \vec{w} sont deux solutions du même problème de Cauchy linéaire (P), définies sur un intervalle I (compact ou non), alors le corollaire précédent garantit que \vec{v} et \vec{w} coïncident au moins sur un petit intervalle centré en t_0 . Montrons qu'en réalité \vec{v} et \vec{w} coïncident sur tout l'intervalle I .

Posons

$$t_1 = \sup\{t \geq t_0, t \in I: \vec{v}(t) = \vec{w}(t)\}.$$

On doit avoir $t_1 = \sup I$. En effet, si $t_1 < \sup I$, alors $\vec{v}(t_1) = \vec{w}(t_1) =: U_1$ par la continuité de \vec{v} et \vec{w} . Donc par l'unicité du problème de Cauchy (P) avec condition initiale $U(t_1) = U_1$, sur un petit intervalle de type $[t_1 - \delta, t_1 + \delta]$, nous avons que \vec{v} et \vec{w} coïncident sur $[t_0, t_1 + \delta]$. C'est absurde, puisque cela contredit la définition de t_1 . Ainsi \vec{v} et \vec{w} coïncident pour $t \geq t_0$. On prouve de même qu'elles coïncident pour $t \leq t_0$. \square

Prolongement des solution. Traitons le cas d'un intervalle I général (éventuellement illimité) et considérons le problème de Cauchy (P). On se propose de prolonger la solution (définie a priori seulement dans un petit intervalle centré en t_0 , à une solution définie globalement sur I . Détaillons d'abord le problème du prolongement « à droite ».

Considérons l'intervalle $J \subset I$ défini par

$$J = \{\lambda \in I \text{ tels qu'il existe } U_\lambda: [t_0, \lambda] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ solution de (P) sur } [t_0, \lambda]\}$$

Soit

$$\lambda^* = \sup J$$

Démontrons que $\lambda^* = \sup I$. Par contradiction, supposons que $\lambda^* < \sup I$. Il existe b tel que $t_0 < \lambda^* < b < \sup I$. (Le fait que $t_0 < \lambda^*$ est une conséquence du Corollaire 8.4). Soit $\delta > 0$ tel que

$$2\delta \sup_{t \in [t_0, b]} |A(t)|_\infty < 1.$$

La solution de (P) $U_{\lambda^* - \delta}$, définie sur $[t_0, \lambda^* - \delta]$, est unique. Considérons alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} U'(t) = A(t)U(t) + B(t) \\ U(\lambda^* - \delta) = U_{\lambda^* - \delta}(\lambda^* - \delta). \end{cases}$$

D'après le corollaire, ce problème possède une solution \hat{U} qui est définie, au moins, sur l'intervalle $[\lambda^* - \delta, \lambda^* + \delta] \cap I$. Nous pouvons utiliser cette solution \hat{U} pour prolonger la solution $U_{\lambda^* - \delta}$ du problème (P) à droite, au delà de l'instant λ^* . Mais, par définition de λ^* , aucune solution de (P) n'est prolongeable au delà de λ^* . C'est absurde, donc $\lambda^* = \sup I$.

Le prolongement à gauche se fait de la même manière. En conclusion, il existe une solution du problème (P) qui est définie sur I tout entier.

Nous avons alors démontré le théorème suivant.

Théorème 8.6. *Si I est un intervalle arbitraire et $A \in C(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $B \in C(I, \mathbb{R}^n)$, alors le problème de Cauchy linéaire (P) possède une et une seule solution $u \in C(I, \mathbb{R}^n)$.*

Exemple 8.3. Soit $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Le problème de Cauchy linéaire

$$\begin{cases} u'(t) = \ln(1+t)u(t) + v(t) + f(t) \\ v'(y) = e^t u(t) + \frac{1}{t-2}v(t) + g(t) \\ u(0) = u_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

possède une unique solution (u, v) définie sur l'intervalle $] - 1, 2[$.

Trajectoires et courbes intégrales

Définition 8.3 (Trajectoires). Si $\vec{v}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution du système différentiel linéaire (E), l'ensemble de \mathbb{R}^n $\{\vec{v}(t): \mathbb{R}^n: t \in I\}$ est dite « trajectoire » du système.

Par exemple, pour le système différentiel de l'exemple 8.2, les cercles de rayon $r > 0$ sont des trajectoires du système.

L'unicité des solutions implique que deux trajectoires distinctes ne s'intersectent pas. Dans le cas $n = 1$, pour visualiser la dynamique d'une équation différentielle scalaire, plutôt que de dessiner les ensembles $\{v(t): t \in I\}$ (qui ne seraient que des intervalles de \mathbb{R}), on préfère représenter dans \mathbb{R}^2 , les graphes des fonctions $t \mapsto v(t)$. Ces graphes, où $v: I \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle, sont appelés « courbes intégrales ».

8.3 Solution générale d'un système différentiel linéaire

8.3.1 Cas général : coefficients variables

Définition 8.4. La « solution générale » d'un système différentiel linéaire

$$U'(t) = A(t)U(t) + B(t), \quad t \in I \quad (\text{E})$$

est l'ensemble des solutions de ce système.

Commençons par observer que

- Si v et w sont deux solutions de (E) alors leur différence $v - w$ est une solution du système linéaire homogène associé, à savoir du système

$$U'(t) = A(t)U(t), \quad t \in I \quad (\text{H})$$

- Si v est une solution de (E), et u est une solution du système homogène associé, alors $v + u$ est aussi une solution de (E).

Donc :

La solution générale de (E) est donnée par la solution générale de (H) plus une solution particulière de (H)

Le théorème suivant donne la structure de la solution générale de (H).

Théorème 8.7. Soit $A \in C(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. La solution générale du système différentiel linéaire homogène

$$U'(t) = A(t)u(t), \quad t \in I \quad (\text{H})$$

est un espace vectoriel de dimension n .

Dém. Si w et w sont deux solutions et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(v + \lambda w)' = v'(t) + \lambda w'(t) = A(t)(v + \lambda w)(t)$. Donc $v + \lambda w$ est solution. Ceci montre que la solution générale est bien un espace vectoriel.

Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de \mathbb{R}^n , où $e_1 = (1, 0, \dots)$, \dots , $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Considérons les problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} U'(t) = A(t)U(t) \\ U(t_0) = e_k \end{cases} \quad (k = 1, \dots, n). \quad (\text{P}_k)$$

Pour tout $k = 1, \dots, n$, le problème (P_k) possède une et une solution \vec{v}_k . Montrons que $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ forme une base de l'espace des solutions.

Les solutions $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sont linéairement indépendantes, puisque

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{v}_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{v}_k(t_0) = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Ensuite si \vec{v} est une solution du système différentiel $U'(t) = A(t)U(t)$, on a

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{v}_k \quad \text{avec } \lambda_k = \vec{v}(e_k).$$

En effet, les deux membres à gauche et droite sont solutions sur I du même problème de Cauchy

$$\begin{cases} U'(t) = A(t)U(t), \\ U(t_0) = U_0 \end{cases}$$

Par l'unicité des solutions, les deux membres doivent coïncider. □

Exemple 8.4. Le système différentiel homogène et à coefficients constants

$$\begin{cases} u_1'(t) = -u_2(t) \\ u_2'(t) = u_1(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

admet comme solution générale la famille des fonctions définies pour $t \in \mathbb{R}$

$$t \mapsto a \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Cette famille est bien un espace vectoriel de dimension 2.

8.3.2 Cas particulier : systèmes à coefficients constants

Le résultat suivant est une application classique de l'algèbre linéaire aux systèmes différentiels à coefficients constants.

Proposition 8.8. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Considérons le système différentiel homogène à coefficients constants*

$$U'(t) = AU(t).$$

Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A et λ la valeur propre correspondante, alors la fonction

$$t \mapsto e^{\lambda t} \vec{v}$$

est une solution du système différentiel. En particulier, si A diagonalisable sur \mathbb{R} , A admet une base de vecteurs propres $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, n$). Une base de l'espace des solutions est donnée par les fonctions

$$t \mapsto e^{\lambda_i t} \vec{v}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

où λ_i est la valeur propre associée au vecteur propre \vec{v}_i .

Dém. En effet

$$(e^{\lambda t} \vec{v})' = e^{\lambda t} \lambda \vec{v} = e^{\lambda t} A \vec{v} = A(e^{\lambda t} \vec{v}).$$

□

Exemple 8.5. Soit le système différentiel

$$U'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} U(t).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = 5$ et les vecteurs propres

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solution générale du système différentiel est alors

$$t \mapsto a \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Exponentiel d'une matrice carrée. L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme euclidienne de matrice $A \mapsto |A|$ définie dans la section 8.1. Par conséquent, toute série de matrices $\sum A_k$ normalement convergente (c'est à dire telle que $\sum |A_k|$ converge) est convergente : il existe alors une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = \sum_{k=0}^{\infty} A_k$.

Considérons maintenant une matrice A . La série $\sum \frac{|A|^k}{k!}$ étant convergente, nous pouvons définir une nouvelle matrice

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Ici A^0 désigne la matrice identité.

Exemple 8.6. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $b \neq 0$, on calcule par récurrence, pour $k \geq 1$, $A^k = \begin{pmatrix} 0 & ab^{k-1} \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$. Mais $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} = e^b$. Donc

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 0 & a + \frac{a}{b}e^b \\ 0 & e^b \end{pmatrix}.$$

Des algorithmes d'algèbre linéaire (diagonalisation, décomposition de Dunford, etc.) permettent de calculer, un peu laborieusement, l'exponentiel d'une matrice réelle $n \times n$.

Théorème 8.9. *L'unique solution du problème de Cauchy linéaire homogène à coefficients constants*

$$\begin{cases} U'(t) = AU(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

est la fonction $t \mapsto \exp(tA)U_0$.

Dém. Considérons la fonction matricielle $t \mapsto \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$. Le théorème de dérivation d'une série, établi pour les fonctions scalaires (Théorème ??) reste vrai pour les fonctions matricielles. Mais alors,

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{t^{k-1} A^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!} = A \exp(tA).$$

Observons maintenant que (c'est un cas particulier de (8.1)) :

$$\frac{d}{dt} (\exp(tA)U_0) = A \exp(tA)U_0.$$

Donc $u(t) := \exp(tA)u_0$ vérifie l'équation différentielle. De plus on a clairement

$$U(0) = IU_0 = U_0.$$

□

8.4 Systèmes différentiels triangulaires

Commençons par traiter le cas des fonctions $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ scalaires. La théorie précédente s'applique, mais on peut aussi facilement expliciter les solutions.

Équations linéaires d'ordre 1 et méthode de variation de la constante

Considérons l'équation linéaire (scalaire) d'ordre 1, sur un intervalle I .

$$u' + a(t)u = b(t). \quad (\text{E1})$$

L'équation homogène associée est

$$u' + a(t)u = 0. \quad (\text{H1})$$

Soit $A(t)$ une primitive sur I de $a(t)$. En multipliant cette équation par $e^{A(t)}$ on trouve $(e^{A(t)}u)' = 0$. Donc $e^{A(t)}u = c$ est constante sur I . Mais alors, la solution générale de l'équation homogène (H1) est $u(t) = ce^{-A(t)}$. Pour trouver une solution particulière de l'équation (E1), on peut faire appel à la méthode de variations des constantes : il s'agit de chercher une solution de (E1) parmi les fonctions de la forme

$$u(t) = c(t)e^{-A(t)}.$$

Un petit calcul montre qu'il faut que $c'(t) = b(t)e^{A(t)}$. En conclusion, la solution générale de l'équation (E1) est

$$u(t) = c(t)e^{-A(t)} + ce^{-A(t)},$$

où

$$c(t) = \int b(t)e^{A(t)} dt, \quad A(t) = \int a(t) dt, \quad \text{et } c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 8.7. La solution générale sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$u' + u/t = e^t$$

est, d'après l'application de la méthode ci-dessus,

$$u(t) = \frac{(t-1)e^t}{t} + c \frac{1}{t}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 8.8. La formule précédente permet de trouver la solution générale de systèmes différentiels triangulaires d'ordre n (c'est-à-dire associée à une matrice $A(t)$ triangulaire). Par exemple,

$$\begin{cases} u'(t) = a(t)u(t) + b(t) \\ v'(t) = c(t)u(t) + d(t)v(t) + e(t) \end{cases}$$

En effet, on commence par résoudre l'équation différentielle linéaire scalaire pour u et après substitution dans la deuxième équation on obtient une autre équation différentielle linéaire scalaire pour v .

8.5 Équations différentielles linéaires d'ordre supérieure

Dans toute cette section nous désignons par $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonction scalaires.

8.5.1 Cas général. Coefficients variables

Définition 8.5. Soient $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{k-1}(t)$ et $b(t)$ des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Une équation différentielle linéaire est une équation de la forme

$$u^{(k)} + a_{k-1}(t)u^{(k-1)} + \dots + a_1(t)u' + a_0(t)u = b(t), \quad t \in I. \quad (8.2)$$

Si le terme à droite vérifie $b(t) \equiv 0$ sur I , alors l'équation est dite homogène. L'ensemble des solutions est appelé « solution générale ».

En général, on peut réduire une équation différentielle d'ordre supérieur à un système du premier ordre. Voici un exemple de la démarche :

Exemple 8.9. Considérons l'équation scalaire d'ordre 3

$$u'''(t) = 3tu''(t) + \sin t u(t) + |t|.$$

On introduit la fonction vectorielle $U = (U_1, U_2, U_3) := (u, u', u'')$. Avec ces notations on voit que l'équation donnée équivaut au système

$$\begin{cases} U_1' = U_2 \\ U_2' = U_3 \\ U_3'(t) = 3tU_3(t) + \sin t U_1(t) + |t|. \end{cases}$$

Ce système s'écrit sous la forme vectorielle

$$U'(t) = A(t)U(t) + B(t), \quad \text{avec} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin t & 0 & 3t \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |t| \end{pmatrix}$$

En général, l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre k s'écrit sous la forme vectorielle suivante :

$$u'(t) = A(t)u + B(t).$$

Ici,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & \dots & -a_{k-1}(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Nous déduisons alors des résultats de la section précédente le théorème suivant :

Théorème 8.10. La solution générale d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre k homogène est un espace vectoriel de dimension k .

Pour une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre k non homogène, la solution générale sera donnée par une solution particulière plus la solution générale de l'équation différentielle homogène associée.

8.5.2 Cas particulier : coefficients constants

Une équation différentielle linéaire (scalaire) *homogène* à coefficients constants est une équation de la forme

$$u^{(k)} + a_{k-1}u^{(k-1)} + \dots + a_1u' + a_0u = 0, \quad (\text{H}k)$$

où a_{k-1}, \dots, a_0 sont des constantes réelles.

Introduisons le polynôme caractéristique de cette équation, qui par définition est le polynôme

$$P(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Exemple 8.10. L'équation différentielle homogène d'ordre 2

$$u'' - 3u' + 2u = 0$$

a pour polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, qui possède les deux racines réelles $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. Observons que e^t et e^{2t} sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle. Donc l'équation a pour solution générale

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 8.11. L'équation différentielle homogène d'ordre 2

$$u'' - 2u' + u = 0$$

a pour polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, qui possède une racine double $\lambda = 1$. Observons que e^t est bien une solution de l'équation différentielle. Mais cela ne suffit pas pour décrire la solution générale \mathcal{V}_0 , qui est un espace de dimension 2. Observons cependant que te^t est une autre solution de l'équation, indépendante de la précédente. Donc l'équation a pour solution générale

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 8.12. L'équation

$$u''' - 2u'' + 2u' = 0$$

admet le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda$ dont les racines sont $\lambda = 0$, $\lambda = 1 + i$ et $\lambda = 1 - i$. La fonction constante $t \mapsto e^{0\lambda} = 1$ est une solution de l'équation. Les fonctions à valeurs complexes $t \mapsto e^{(1+i)t}$ et $t \mapsto e^{(1-i)t}$ sont bien deux solutions de l'équation différentielle, mais afin d'écrire une solution générale en termes de fonctions réelles on préfère prendre leur somme/différence. Ainsi, la solution générale est

$$u(t) = c_1 + c_2 e^t \cos t + c_3 e^t \sin t, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Le théorème suivant résume les considérations précédentes :

Théorème 8.11. *Considérons l'équation différentielle linéaire (scalaire) homogène à coefficients constants (Hk).*

1. Si λ , est une racine réelle du polynôme caractéristique, de multiplicité $m \geq 1$ les fonctions

$$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda t}$$

sont des solutions de l'équation (Hk).

2. Si $\lambda = \alpha + i\beta$ (avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), est une racine complexe du polynôme caractéristique $\lambda \in \mathbb{C}$ de multiplicité $m \geq 1$ (au quel cas aussi $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ sera une racine complexe conjuguée), alors

$$t \mapsto t^j e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad \text{ou} \quad t \mapsto t^j e^{\alpha t} \sin(\beta t), \quad j = 1, \dots, m$$

sont des solutions de l'équation (Hk).

Les k solutions ainsi obtenues forment une base de l'espace de solutions de l'équation (Hk).

Plus en général, on peut considérer les équations différentielles linéaires à coefficients constants avec second membre.

$$u^{(k)} + a_{k-1} u^{(k-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f(t). \quad (\text{Ek})$$

Les techniques vu précédemment fournissent la solution générale de l'équation homogène associée. Pour trouver la solution générale de l'équation (Ek) il ne reste qu'à trouver une solution

particulière de (Ek). Pour ce faire, on peut chercher d'abord des solutions qui "ressemblent" à la fonction $f(t)$ *. Si on n'en trouve pas, il peut être utile d'appliquer la méthode de variations des constantes.

8.6 Équations différentielles non-linéaires

Une équation différentielle scalaire

$$u' = f(t, u(t)), \quad t \in I$$

où f est une fonction de deux variables est non linéaire lorsque l'application $u \mapsto f(t, u)$ est non linéaire. Nous ne présentons pas de théorie générale, et nous nous limitons à illustrer deux exemples.

Exemple 8.13. Considérons le problème de Cauchy non-linéaire

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)^2 \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

Observons qu'au voisinage de 0 la fonction u ne s'annule pas et que $u'(t)u^{-2}(t) = 1$. Donc, en calculant une primitive terme-à-terme $u(t)^{-1} = -t + c$, avec $c = 1$ à cause de la condition initiale $u(0) = 1$. Mais alors $u(t) = 1/(1-t)$ et on voit alors que la solution « explose » en $t = 1$. Cet exemple montre qu'en général les solutions d'une équation différentielle non-linéaire ne sont toujours pas définies globalement sur tout l'intervalle I où la fonction $t \mapsto f(t, u)$ est définie.

Exemple 8.14. Considérons le problème de Cauchy non-linéaire

$$\begin{cases} u'(t) = 3u(t)^{2/3} \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

Pour ce problème il n'y a pas unicité de solution. En effet, on vérifie directement que la fonction nulle et la fonction $t \mapsto t^3$ sont deux solutions distinctes. En général la non-unicité d'un problème de Cauchy se produit lorsque l'application $u \mapsto f(t, u)$ n'est pas lipschitzienne.

*. Si $f(t)$ est de la forme $P(t)e^{\lambda t}$, avec $P(t)$ polynôme, on cherchera une solution de la forme $Q(t)e^{\lambda t}$ avec $Q(t)$ polynôme du même degré que $P(t)$. Si $f(t)$ est de la forme $\sin(\lambda t)$, ou $\cos(\lambda t)$, on cherchera une solution de la forme $A \cos t + B \sin t$. Cette méthode ne fonctionne pas si la solution particulière que l'on cherche de l'équation avec second membre s'avère être une solution de l'équation homogène associée. Dans cette situation, on peut augmenter le degré du polynôme Q .