CORRECTION DU PARTIEL DU 6 MARS 2023

Voici **UNE** correction possible du CP. La rédaction n'est pas exhaustive, mais donne l'idée des réponses.

Exercice 1(3pts) On a $f(x,y) = x\sin y$. Les dérivées partielles sont:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x\sin y \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos y.$$

Le DL à l'ordre 2 de f en $(0,0)$ est donc:

$$\begin{aligned} f(x,y) &\underset{(0,0)}{=} f(0,0) + (x-0)\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + (y-0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ &+ \frac{1}{2}((x-0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + 2(x-0)(y-0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) + (y-0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)) + o(\|(x,y)\|^2) \\ &\underset{(0,0)}{=} xy + o(\|(x,y)\|^2). \end{aligned}$$

Exercice 2(6pts)

1) On a $f(x,y) = (x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{-x}$. Les dérivées partielles sont:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x - (x^2+y^2))\,\mathrm{e}^{-x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\,\mathrm{e}^{-x}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (2 - 4x + x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{-x} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\,\mathrm{e}^{-x} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2y\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Les points critiques vérifient le système suivant:

$$\begin{cases} 2x - (x^2+y^2) &= 0 \\ 2y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = x(2-x) &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

Les points critiques sont donc $(0,0)$ et $(2,0)$. On a

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc $(0,0)$ est un minimum local. Ensuite, on a

$$Hess_f(2,0) = \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{e}^{-2} & 0 \\ 0 & 2\,\mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix}$$

Donc $(2,0)$ est un point col.

2) On remarque que $\lim_{y\to\infty} f(y,0) = +\infty$, donc il n'y a pas de maximum global. Ensuite, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) - f(0,0) = (x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{-x} \geq 0,$$

car les carrés et l'exponentielle sont toujours positifs. Donc f possède un minimum global en $(0,0)$ qui vaut 0.

Exercice 3(6pts) On a $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq R\}$. Voici **une** façon d'expliquer le choix des bornes:

Soit $(x,y,z) \in D$. Alors z vérifie $0 \leq z \leq R-x-y$. Donc en particulier, $R-x-y \geq 0$, ce qui donne $0 \leq y \leq R-x$ et donc $0 \leq x \leq R$.

$$\begin{aligned} \iiint_D dxdydz &= \int_{x=0}^{R}\int_{y=0}^{R-x}\int_{z=0}^{R-x-y} dzdydx = \int_{z=0}^{R}\int_{y=0}^{R-x}(R-x-y)dydx \\ &= \int_{x=0}^{R}\left[-\frac{(R-x-y)^2}{2}\right]_0^{R-x} dx = \int_{x=0}^{R}\frac{(R-x)^2}{2}dx = \left[-\frac{(R-x)^3}{6}\right]_0^R = \frac{R^3}{6} \end{aligned}$$

Exercice 4(10pts) **1)** (3pts) On a $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Les dérivées partielles sont:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - \frac{1}{x^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - \frac{1}{y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{x^3} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{y^3} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1.$$

Les points critiques vérifient donc le système suivant:

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & \frac{1}{x^2} \\ x & = & \frac{1}{y^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y & = & \frac{1}{x^2} \\ x & = & x^4 \end{array}\right.$$

Or $x^4 - x = x(x^3-1) = x(x-1)(x^2+x+1)$. Le polynôme x^2+x+1 n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$ et f n'est pas définie quand $x=0$. Donc le seul point critique est $(1,1)$.

Ensuite, on a

$$Hess_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc $(1,1)$ est un minimum local.

2)(2pts) Soit $(x,y) \in K$. Montrons que $(x,y) \in \left[\frac{1}{A}, A^2\right] \times \left[\frac{1}{A}, A^2\right]$. On a

$$0 \leq xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq A$$

Donc, en particulier, puisque $xy > 0$, on a $1/x \leq A$ et $1/y \leq A$, ce qui équivaut à $x \geq 1/A$ et $y \geq 1/A$. Ensuite, comme $x > 0$ et $y > 0$, on a

$$xy \leq A \Leftrightarrow x \leq \frac{A}{y}$$

Comme $y \geq A$, on obtient $x \leq A^2$. De même pour $y \leq A^2$.
Donc $(x,y) \in \left[\frac{1}{A}, A^2\right] \times \left[\frac{1}{A}, A^2\right]$.

3)(2pts) Montrons que K est compact. Pour cela, montrons que K est fermé et bornée.

D'après la question 2), nous avons vu que K est contenu dans l'ensemble $\left[\frac{1}{A}, A^2\right] \times \left[\frac{1}{A}, A^2\right]$ qui est borné. Donc K est borné.

Ensuite, rappelons que $K = \{(x,y); x>0, y>0, f(x,y) \leq A\}$. Les inégalités ne sont pas toutes larges ! Regardez $x > 0$ et $y > 0$! Un moyen de s'en sortir est de voir que si $(x,y) \in K$, on a en particulier $x \geq \frac{1}{A}$ et $y \geq \frac{1}{A}$. Nous pouvons donc réécrire K comme suit:

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq \frac{1}{A}, y \geq \frac{1}{A}, f(x,y) \leq A\}.$$

Et comme f est continue (très important à préciser), K est bien un ensemble fermé.

Au total, on obtient que K est compact.

4)(2pts) Comme K est compact et f est continue, par le théorème de Weierstrass, il existe un minimiseur que l'on notera (x^*, y^*) sur K (et pas sur $\{(x,y); x>0, y>0\}$! il faut travailler un peu plus). Donc

$$f(x^*, y^*) = \min_K f.$$

Ensuite, soit $(x,y) \in \{(x,y);\ x>0, y>0\}$ tel que $(x,y) \notin K$. En particulier, on a $f(x,y) > A \geq f(x^*, y^*)$. Donc (x^*, y^*) est bien un minimiseur global de f, ce qui prouve l'existence d'un minimiseur de f sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y > 0\}$.

5)(1pts) Notons x la longueur, y la largeur et z la hauteur du parallépipède. On a cherche à résoudre le problème suivant avec contrainte:

$$\min_{\substack{(x,y,z)\in(\mathbb{R}^{+*})^3 \\ xyz=1}} 2(xy + xz + yz).$$

Nous pouvons éliminer la contrainte en écrivant $z = \frac{1}{xy}$. Le problème devient

$$\min_{(x,y)\in(\mathbb{R}^{+*})^2} 2(xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}).$$

Comme 2 est une constante, cela revient à résoudre

$$\min_{(x,y)\in(\mathbb{R}^{+*})^2} (xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}) = f(x,y).$$

Or, la question 4) nous donne l'existence d'un minimiseur sur l'*ouvert* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x>0, y>0\}$. Donc d'après la proposition du cours, le minimiseur est un point critique de f et le seul point critique de f est $(1,1)$. Donc $(1,1)$ est le minimum global de f sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x>0, y>0\}$.

En conclusion, la boîte doit être un cube de côté 1 pour minimiser l'aire du parallépipède.