Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie

Analyse pour l'économie 2. Partiel du 6 mars 2023. Durée 1h30.

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2, centrée en $(0,0)$ pour la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = x \sin y$.

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x^2+y^2)\exp(-x)$.

1. Trouver les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle ne possède pas de maximum global.

Exercice 3. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par l'équation $x+y+z=R$ et les conditions $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Démontrer que, si $R > 0$, on a

$$\iiint_D 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{R^3}{6},$$

Exercice 4. On pose, pour $x > 0$ et $y > 0$,

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

1. Démontrer que f possède un minimum **local** dans l'ensemble $\{(x,y)\colon\ x>0,\ y>0\}$.
2. Démontrer que, pour tout $A \geq 1$, l'ensemble de sous-niveau
$$K = \{(x,y)\colon x>0,\ y>0,\ f(x,y) \leq A\}$$
est contenu dans le carré $[\frac{1}{A}, A^2] \times [\frac{1}{A}, A^2]$ de $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire que K est compact.
4. En utilisant le théorème de Weierstrass, démontrer que f possède un minimum **global** dans l'ensemble $\{(x,y)\colon\ x>0,\ y>0\}$.
5. On s'intéresse aux boîtes en forme de parallélépipède. À l'aide du résultat de la question précédente, démontrer que, parmi les boîtes de volume égal à 1, la boîte cubique est celle qui minimise l'aire.