Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie

Analyse pour l'économie 2. Partiel du 14 mars 2023. Durée 1h45.

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. Considérons la fonction définie par $f(x,y) = 4x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3$.

1. Calculer les dérivées partielles de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Écrire l'équation du plan de $\mathbb{R}^3$, tangent au graphe de f au point $P = (1,0,4)$.
3. Démontrer que f possède deux points critiques dans $\mathbb{R}^2$ et en donner la nature.
4. Calculer $\lim_{y\to-\infty} f(0,y)$ et démontrer que f n'a pas d'extremum global.

Exercice 2. Calculer les dérivées directionnelles

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1), \qquad \frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0)$$

le long toute direction $\vec{v} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$, des fonctions f et $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = x^3 y, \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3. Supposons que les fonctions différentiables $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifient la relation

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad f(x,y) = g(x^2 y, 3x).$$

1. Exprimer, en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les dérivées partielles de f en fonction des dérivées partielles de g.
2. Supposons de savoir que $\nabla g(0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Déduire des formules trouvées à la question précédente que $\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Question de cours. Démontrer, en calculant une intégrale double en coordonnées polaires, que l'aire d'un disque de rayon R est πR^2.

(1)

$$f(x,y) = 4x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3$$

1) $\boxed{f_x(x,y) = 8x - 2y}$ $\boxed{f_y(x,y) = -2x + y^2}$

2) $f(1,0) = 4$, donc le point $P = (1,0,4)$ appartient bien au graphe de f dans $\mathbb{R}^3$. $f_x(1,0) = 8$ $f_y(1,0) = -2$

Le plan cherché est le plan d'équation $z - 4 = 8(x-1) - 2y$

c.à.d $\boxed{8x - 2y - z = 4}$

3) $\begin{cases} 8x - 2y = 0 \\ -2x + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x \\ -2x + 16x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ ou $(x,y) = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$

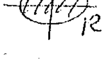
les deux points critiques sont $(0,0)$ et $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$.

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ $\quad rt - s^2 = 16y - 4 = \begin{cases} -4 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ 4 & \text{si } (x,y) = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$
$r = 8 > 0$

$\boxed{\text{l'origine est un point de col et } \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right) \text{ est un point de minimum local.}}$

4) $\lim_{y \to -\infty} f(0,y) = \lim_{y \to -\infty} \frac{1}{3}y^3 = -\infty$, donc f n'a pas de minimum global. f n'a pas non plus de maximum global (sinon on aurait dû trouver un troisième point critique).

Question de cours :



Soit D le disque de rayon R centré en $(0,0)$.

$$\text{Aire}(D) = \iint_D 1\, dx dy = \iint_{[0,R] \times [0,2\pi]} \rho\, d\rho\, d\theta = \left(\int_0^R \rho\, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = \frac{1}{2}R^2 2\pi = \pi R^2$$

② f est différentiable dans $\mathbb{R}^2$ parce que de classe C^1

Donc $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = f_x(1,1)v_1 + f_y(1,1)v_2$ où (v_1, v_2) sont les coordonnées du vecteur $\vec{v}$.

Mais $f_x(x,y) = 3x^2y$ et $f_y(x,y) = x^3$

$f_x(1,1) = 3$ $\quad f_y(1,1) = 1$. D'où $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = 3v_1 + v_2}$

La fonction g n'étant pas différentiable en $(0,0)$ on calcule $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0)$ avec la définition.

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(tv_1, tv_2) - g(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{tv_1\, t^2 v_2^2}{t(t^2v_1^2 + t^2v_2^2)}$$

$$= \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} = v_1 v_2^2$$ (puisque $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$).

③ $f(x,y) = g(x^2y, 3x)$

$f_x(x,y) = g_x(x^2y, 3x)\, 2xy + g_y(x^2y, 3x)\cdot 3$

$f_y(x,y) = g_x(x^2y, 3x)\, x^2 + g_y(x^2y, 3x)\cdot 0$

$$\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} f_x(0,1) \\ f_y(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x(0,0)\cdot 0 + g_y(0,0)\cdot 3 \\ g_x(0,0)\cdot 0 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$g_y(0,0) = 5$