

## Analyse pour l'économie 2. Partiel du 14 mars 2023. Durée 1h45.

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

**Exercice 1.** Considérons la fonction définie par  $f(x, y) = 4x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3$ .

1. Calculer les dérivées partielles de  $f$  en tout point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
2. Écrire l'équation du plan de  $\mathbb{R}^3$ , tangent au graphe de  $f$  au point  $P = (1, 0, 4)$ .
3. Démontrer que  $f$  possède deux points critiques dans  $\mathbb{R}^2$  et en donner la nature.
4. Calculer  $\lim_{y \rightarrow -\infty} f(0, y)$  et démontrer que  $f$  n'a pas d'extremum global.

**Exercice 2.** Calculer les dérivées directionnelles

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 1), \quad \frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0, 0)$$

le long toute direction  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , des fonctions  $f$  et  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$f(x, y) = x^3y, \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 3.** Supposons que les fonctions différentiables  $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  vérifient la relation

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: \quad f(x, y) = g(x^2y, 3x).$$

1. Exprimer, en tout point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , les dérivées partielles de  $f$  en fonction des dérivées partielles de  $g$ .
2. Supposons de savoir que  $\nabla g(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Dédurre des formules trouvées à la question précédente que  $\nabla f(0, 1) = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Question de cours.** Démontrer, en calculant une intégrale double en coordonnées polaires, que l'aire d'un disque de rayon  $R$  est  $\pi R^2$ .