Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie

Partiel d'analyse pour l'économie 2. Année 2024-25

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. On considère la fonction f définie par $f(x, y) = 5 + \ln(x + 2y)$.

1. Écrire l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(1, 0, 5)$.
2. Préciser les coordonnées du point d'intersection de ce plan avec l'axe z.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par

$$f(x, y, z) = xy + z^3.$$

1. Calculer les dérivées partielles de f en tout point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $\nabla f(1, 2, 1)$ et ensuite $\|\nabla f(1, 2, 1)\|$.
3. Trouver une direction $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 2, 1) = \sqrt{14}$.
4. Trouver une direction $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(1, 2, 1) = 0$.

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par

$$f(x, y) = xe^{-x}(y^2 - 4y).$$

1. Trouver les trois points critiques de f.
2. Étudier la nature des trois points critiques.
3. Écrire la formule de Taylor d'ordre 2 de f centrée en $(0, 4)$.

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par $F(x, y) = f(2xy, 4x, y^2)$.

1. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$, en fonction des dérivées partielles de f.
2. On suppose que $\nabla f(4, 4, 4) = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi^2 \\ \pi^3 \end{pmatrix}$. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}(1, 2)$.