

Analyse pour l'économie 2. Partiel du 19 mars 2026. Durée 1h30.

Documents, calculatrice et équipements connectés non autorisés.

Exercice 1.

1. Calculer la dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 1)$ de la fonction f définie par

$$f(x, y) = \ln(xy^2),$$

le long toute direction $\vec{v} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

2. Préciser la direction $\vec{v}$ qui maximise $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 1)$. Préciser ensuite une direction telle que $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 1)$ s'annule.
3. Trouver l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(1, 1, 0)$.

Exercice 2. Après avoir rappelé le développement limité de la fonction $t \mapsto \exp(t)$, écrire la formule de Taylor à l'ordre 2, centrée en $(0, 0)$, de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \exp(x + 2y + xy).$$

Exercice 3. Considérons la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$.

1. Calculer les dérivées partielles et la matrice Hessienne de f en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f possède deux points critiques dans $\mathbb{R}^2$ et en donner la nature.
3. Établir s'il existe $\max_{\mathbb{R}^2} f$ et s'il existe $\min_{\mathbb{R}^2} f$.
Soit $K = [0, 1] \times [0, 1]$. Expliquer pourquoi f possède un minimum et maximum absolu sur K .
4. Étudier la restriction de f sur les quatre côtés de la frontière de K . Calculer $\max_K f$ et $\min_K f$.

Exercice 4. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la fonction définie par $f(x, y) = (\cos(y^2), x^3, e^y)$.

1. Écrire la matrice jacobienne de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On pose, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = g(f(x, y)).$$

Exprimer les dérivées partielles de F en tout point de $\mathbb{R}^2$, à l'aide des dérivées partielles de g

3. Supposons de savoir que $\nabla g(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\nabla F(0, 0)$.

Corrigé

Exercice 1.

1. On a

$$f(x, y) = \ln(xy^2) = \ln x + 2 \ln y.$$

Donc, puisque le logarithme est dérivable sur un voisinage autour de 1, on a alors que f admet des dérivées partielles autour d'un voisinage de $(1, 1)$.

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{2}{y} \right), \quad \nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La dérivée directionnelle le long de $\vec{v} = (v_1, v_2)$ est

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \vec{v} = v_1 + 2v_2.$$

2. La dérivée directionnelle est maximale dans la direction du gradient par le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2).$$

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{5}}$ est choisi de manière que $\|\vec{v}\| = 1$.

La dérivée directionnelle s'annule lorsque $v_1 + 2v_2 = 0$, par exemple pour

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1).$$

3. On a $f(1, 1) = 0$. Donc le point $(1, 1, 0)$ est bien sur le graphe de f . Le calcul de $\nabla f(1, 1)$ nous permet de dire que le plan tangent est le plan d'équation $z - 0 = 1(x - 1) + 2(y - 1)$. L'équation cherchée est donc

$$x + 2y - z = 3.$$

Exercice 2.

1. On rappelle

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Ici

$$f(x, y) = e^{x+2y+xy}.$$

Posons $t = x + 2y + xy$. On a $t = t(x, y) \rightarrow 0$ pour $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Alors

$$f(x, y) = 1 + (x + 2y + xy) + \frac{(x + 2y + xy)^2}{2} + o(\|(x, y)\|^2).$$

En gardant seulement les termes d'ordre ≤ 2 :

$$(x + 2y + xy)^2 = x^2 + 4y^2 + 4xy + o(\|(x, y)\|^2).$$

Donc

$$f(x, y) = 1 + x + 2y + xy + \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 + 2xy + o(\|(x, y)\|^2).$$

Ainsi

$$f(x, y) = 1 + x + 2y + \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 + 3xy + o(\|(x, y)\|^2).$$

Exercice 3. La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ car polynômes en les variables x et y . Calculons les dérivées partielles.

1.

$$f_x(x, y) = 6x^2 - 6y, \quad f_y(x, y) = -6x + 6y.$$

Hessienne :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Cherchons les points critiques. Il s'agit de résoudre le système

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0, \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$$

Donc

$$y = x^2, \quad y = x.$$

Ainsi

$$x(x - 1) = 0$$

et les points critiques sont

$$(0, 0), \quad (1, 1).$$

Le déterminant de la matrice hessienne est $D(x, y) = 72x - 36$. Donc $D(0, 0) = -36 < 0$ et $(0, 0)$ est alors un point de selle. On peut le voir en remarquant que $(0, 0)$ minimise la fonction $y \mapsto f(1/2, y)$ (en réécrivant $f(x, y) = 3(y - x)^2 + x^2(2x - 1)$), et la fonction $x \mapsto f(x, 0)$ est croissante.

De plus, $D(1, 1) = 36 > 0$ et $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, donc $(1, 1)$ est un minimum local.

3. Quand $x \rightarrow +\infty$, $f(x, 0) \rightarrow +\infty$. Quand $x \rightarrow -\infty$, $f(x, 0) \rightarrow -\infty$. Donc f n'a pas de maximum ni minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

$K = [0, 1] \times [0, 1]$ est compact car fermé borné de $\mathbb{R}^2$; et f est continue. Donc, par le **théorème de Weierstrass**, f admet un minimum et un maximum sur K .

4. Sur les côtés :

$$y = 0 : \quad f(x, 0) = 2x^3,$$

qui est croissante et atteint son maximum ($= 2$) pour $x = 1$ et son minimum ($= 0$) en $x = 0$.

$$x = 0 : \quad f(0, y) = 3y^2,$$

qui est croissante pour $0 \leq y \leq 1$ et atteint son maximum ($= 3$) pour $y = 1$ et son minimum ($= 0$) en $y = 0$.

$$y = 1 : \quad f(x, 1) = 2x^3 - 6x + 3,$$

qui est décroissante pour $0 \leq x \leq 1$ (la dérivée est négative), et atteint son maximum ($= 3$) en $x = 0$ et atteint son minimum ($= -1$) en $x = 1$.

$$x = 1 : \quad f(1, y) = 2 - 6y + 3y^2,$$

qui est décroissante pour $0 \leq y \leq 1$ (la dérivée est négative) et atteint son maximum ($= 2$) en $y = 0$ et atteint son minimum ($= -1$) en $y = 1$.

Les éventuels minimiseurs et maximiseurs de f sur K sont alors situés sur la frontière de K (puisque f n'a pas de points critiques à l'intérieur de K , donc pas de minimiseur/maximiseur locaux).

En utilisant l'étude précédente, on en déduit que les coins sont les lieux des minimiseur/maximiseur. En calculant $f(0, 0)$, $f(1, 0)$, $f(0, 1)$ et $f(1, 1)$ on trouve $\min_K f = f(1, 1) = -1$ et $\max_K f = f(0, 1) = 3$.

Exercice 4. La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car c'est la composée de fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

1.

$$f(x, y) = (\cos(y^2), x^3, e^y).$$

Matrice jacobienne :

$$J_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2y \sin(y^2) \\ 3x^2 & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix}.$$

2. La fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car c'est la composée de fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \nabla g(f(x, y)) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial y}(f(x, y)) 3x^2.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \nabla g(f(x, y)) \cdot \begin{pmatrix} -2y \sin(y^2) \\ 0 \\ e^y \end{pmatrix} = -\frac{\partial g}{\partial x}(f(x, y)) 2y \sin(y^2) + \frac{\partial g}{\partial z}(f(x, y)) e^y.$$

3. On a

$$f(0, 0) = (1, 0, 1).$$

$$\nabla g(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

Donec

$$\nabla F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$