Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
22 mai 2018

Analyse pour l'économie 2. Examen de 1ère session

Exercice 1. Écrire l'équation cartesienne du plan tangent à la surface Σ de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par

$$\begin{cases} x = uv, \\ y = 1 + 3u, & \qquad u, v \in \mathbb{R}, \\ z = v^3 + 2u, \end{cases}$$

au point $P_0 = (1, 4, 3)$.

Solution. La surface Σ est paramétrée par $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, où $\varphi(u, v) = (uv, 1 + 3u, v^3 + 2u)$. On a $P_0 = \varphi(1, 1)$. Ceci montre que le $P_0 \in \Sigma$. Ensuite, $\varphi_u(u, v) = (v, 3, 2)$ et $\varphi_v(u, v) = (u, 0, 3v^2)$. Le vecteur

$$(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v) = (v, 3, 2) \wedge (u, 0, 3v^2) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v & 3 & 2 \\ u & 0 & 3v^2 \end{pmatrix} = (9v^2, -3v^3 + 2u, -3u)$$

est orthogonal à Σ au point $\varphi(u, v)$. En particulier, au point P_0, on voit qu'un vecteur orthogonal à Σ est le vecteur $(9, -1, -3)$. Ce vecteur donnent les coefficients directeurs du plan tangent : ainsi, le plan tangent à Σ en P_0 est un plan d'équation

$$9x - y - 3z = d,$$

Il reste à déterminer d de manière à ce que P_0 appartienne à ce plan. Cela donne $d = 9 - 4 - 9 = 4$. En conclusion l'équation cartesienne du plan est

$$9x - y - 3z = 4.$$

Exercice 2. Soit $a > 0$ et $R > 1$. Soit $A_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x^2 + y^2 \le R^2\}$.

1. Calculer l'intégrale double
$$\iint_{A_R} \frac{1}{(x^2 + y^2)^a} \, dx \, dy$$
à l'aide d'un changement en coordonnées polaires. (Distinguer les cas $a = 1$ et $a \neq 1$).
2. Trouver les valeurs de a telles la limite
$$\lim_{R \to +\infty} \iint_{A_R} \frac{1}{(x^2 + y^2)^a} \, dx \, dy$$
existe finie et la calculer.

Solution. Le passage en coordonnées polaires, $x = \rho \cos\theta$ et $y = \rho \sin\theta$, transforme le domaine A_R en le rectangle $[1, R] \times [0, 2\pi]$. L'intégrale demandée vaut alors

$$\iint_{[1,R] \times [0,2\pi]} \frac{1}{\rho^{2a}} \, \rho \, d\rho \, d\theta = 2\pi \int_1^R \rho^{1-2a} \, d\rho = \begin{cases} 2\pi \ln R, & a = 1 \\ \frac{2\pi}{2-2a}(R^{2-2a} - 1), & a \neq 1. \end{cases}$$

La limite pour $R \to +\infty$ de cette expression est finie si et seulement si $a > 1$. Dans ce cas, la limite vaut $\frac{\pi}{a-1}$.

Exercice 3. Trouver une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont la solution générale est donnée par l'expression suivante :

$$e^{3x}(\alpha + \beta\cos(2x) + \gamma\sin(2x)), \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Solution. L'expression ci-dessus est la solution générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre 3, à coefficients constants et homogène, de la forme

$$y''' + ay'' + by' + cy = 0, \qquad \text{avec } a, b, c, d \text{ à déterminer.}$$

Le polynôme caractéristique associé est $P(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$. On sait que ce polynôme doit avoir comme racines $\lambda = 3$ et $\lambda = 3 \pm 2i$. Donc

$$P(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 3 - 2i)(\lambda - 3 + 2i) = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 6\lambda + 13) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 31\lambda - 39.$$

L'équation différentielle cherchée est donc

$$y''' - 9y'' + 31y' - 39y = 0.$$

Exercice 4 Établir l'existence et éventuellement calculer le maximum et le minimum de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + x + y + 1}$$

dans chacune des situations suivantes :

1. Sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.
2. Sous la contrainte $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solution.

1. La contrainte se présente sous la forme $g(x, y) = 0$, avec $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. L'ensemble K des points (x, y) vérifiant la contrainte est un cercle, qui est un ensemble compact. La fonction f étant continue, $\max_K f$ et $\min_K f$ existent par le théorème de Weierstrass.
   Les fonctions f et g sont de classe C^1 et la contrainte $g = 0$ est de type "égalite". Nous pouvons appliquer alors le théorème des multiplicateurs de Lagrange. Vérifions s'il existe des points où la contrainte est dégénérée. Cela revient à chercher les solutions du système

$$\begin{cases} g(x,y) = x^2 + y^2 = 0 \\ g_x(x,y) = 2x = 0 \\ g_y(x,y) = 2y = 0. \end{cases}$$

   Mais ce système n'a pas de solutions. Le minimum et le maximum de f sous la contrainete $g = 0$ sont alors à chercher parmi les points (x_0, y_0) tels que (x_0, y_0, λ_0) est un point stationnaire de la Lagrangienne associée au problème d'optimisation.
   La Lagrangienne est la fonction

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + x + y + 1} + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

   Le système donnant les points stationnaires de $\mathcal{L}$ est

$$\begin{cases} \frac{-(2x+1)}{(x^2+y^2+x+y+1)^2} + 2\lambda x = 0 \\ \frac{-(2y+1)}{(x^2+y^2+x+y+1)^2} + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Observons que ce système implique $\lambda \neq 0$, $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Les deux premières equations donnent

$$\frac{2x+1}{2\lambda x} = \frac{2y+1}{2\lambda y},$$

et donc $x = y$. Mais alors la troisième équation donne $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. La première équation (ou la deuxième) permet ensuite de trouver les deux valeurs de λ correspondantes, λ_1 et λ_2. Mais le calcul explicite de λ_1 et λ_2 n'est pas important pour cet exercice. Les points stationnaires de $\mathcal{L}$ sont alors

$$(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \lambda_1) \qquad \text{et} \qquad (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \lambda_2).$$

On a

$$f(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{2+\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad f(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{2-\sqrt{2}}.$$

Ces valeurs sont respectivement le minimum et le maximum de f sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

2. La fonction f admet un minimum et un maximum absolu sur le disque $D = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$ par le théorème de Weierstrass, puisque f est continue et D est compact. Il y a priori deux possibilités : les minimum ou maximum de f peuvent être atteint à l'intérieur du disque, ou sinon sur son bord. Dans le premier cas, les points de min ou max sont des points stationnaires pour f, c'est à dire des solutions du système

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \frac{-(2x+1)}{(x^2+y^2+x+y+1)^2} = 0, \\ f_y(x,y) = \frac{-(2y+1)}{(x^2+y^2+x+y+1)^2} = 0, \\ x^2 + y^2 < 1 & \text{(l'intérieur du disque).} \end{cases}$$

Ce système possède une seule solution, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Donc f possède un seul point stationnaire à l'intérieur de D. On a $f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2$. Cette valeur étant supérieure aux valeurs de f sur le cercle [1], on en déduit que

- f atteint son maximum à l'intérieur du disque
- f atteint son minimum sur le sur le bord du disque.
- En conclusion,

$$\max_D f = f(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) = 2, \qquad \min_D f(x,y) = f(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{2+\sqrt{2}}.$$

Remarque. Pour traiter la question 1, on pouvait aussi (et c'était plus rapide) paramétrer le cercle et étudier les variations de la fonction $A(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \frac{1}{2+\cos\theta+\sin\theta}$, où $\theta \in [0, 2\pi]$. En imposant $A'(\theta) = 0$ on trouve facilement $\max A = A(-\pi/4) = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$ et $\min A = A(\pi/4) = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$. On retrouve alors le minimum et le maximum de f sur le cercle.

1. On a bien $2 > \frac{1}{2-\sqrt{2}}$, puisque $3 > 2\sqrt{2}$.