Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
27 mai 2018

Analyse pour l'économie 2. Examen de session 2

Durée 1h30.

Question de cours. Donner un exemple d'un espace métrique complet et un exemple d'un espace métrique non complet.

Solution. On sait que $\mathbb{R}$, muni de la distance usuelle est un espace métrique complet. Par contre, l'espace métrique $X =]0,1]$, toujours muni de la distance usuelle, est non-complet : pour le voir, il suffit de trouver dans X une suite de Cauchy divergente. Or, la suite $(\frac{1}{n})$ est une suite de Cauchy dans X (puisqu'il s'agit d'une suite contenue dans X et convergente dans $\mathbb{R}$), qui ne converge pas dans X (puisque $0 \notin X$).

Exercice 1. Soit $a > 0$ et $R > 1$. Soit $A_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \le x^2+y^2+z^2 \le R\}$.

1. Calculer l'intégrale triple
$$\iiint_{A_R} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
à l'aide d'un changement en coordonnées sphériques. (Distinguer les cas $a = \frac{3}{2}$ et $a \neq \frac{3}{2}$).
2. Trouver les valeurs de a telles la limite
$$L_a = \lim_{R\to+\infty} \iiint_{A_R} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
existe finie et la calculer.

Solution. Le passage en coordonnées sphériques, (ρ,θ,φ), où $\rho \ge 0$ est la distance à l'origine, $\theta \in [0,2\pi]$ est la longitude et $\varphi \in [0,\pi]$ est la co-latitude, donne $x^2+y^2+z^2 = \rho^2$ et $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. De plus le domaine domaine A_R se transforme en le parallélépipède $[1,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$. L'intégrale demandée vaut alors

$$\iiint_{[1,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]} \frac{1}{\rho^{2a}}\,\rho^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_1^R \rho^{2-2a}\,d\rho \int_0^\pi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \begin{cases} 4\pi \ln R, & a = \frac{3}{2} \\ \frac{4\pi}{3-2a}(R^{3-2a}-1), & a \neq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

La limite pour $R \to +\infty$ de cette expression est finie si et seulement si $a > \frac{3}{2}$. Dans ce cas, la limite vaut $\frac{4\pi}{2a-3}$.

Exercice 2. On considère les équations différentielles :

$$y'''' - 16y = 0, \qquad \text{et} \tag{1}$$
$$y''' + 2y'' + 4y' + 8y = 0. \tag{2}$$

.

1. Trouver la solution générale de l'équation (1).
2. Trouver la solution générale de l'équation (2).

3. Déduire de ce qui précède qu'une fonction $x \mapsto y(x)$ (avec $x \in \mathbb{R}$) est solution de l'équation (2) si et seulement si $x \mapsto y(x)$ est une solution de l'équation (1) **bornée sur** $\mathbb{R}^+$.

Solution.

1. Les deux équations différentielles proposées sont linéaires, à coefficients constants et homogènes. On peut alors construire leur solution générale par la méthode du polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique de l'équation (1) est $P(\lambda) = \lambda^4 - 16$, dont les quatre racines sont 2, $2i$, -2 et $-2i$. La solution générale de la première équation différentielle est alors

$$ae^{2x} + be^{-2x} + c\cos(2x) + d\sin(2x), \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Observons que cette solution générale forme un espace vectoriel de dimension 4.

2. Le polynôme caractéristique de l'équation (2) est $Q(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda + 8$. Observons que l'on a la factorisation $P(\lambda) = (\lambda - 2)Q(\lambda)$. Donc toute racine de Q est aussi une racine de P : les racines de Q sont alors -2, $2i$ et $-2i$. La solution générale de l'équation (2) est alors

$$be^{-2x} + c\cos(2x) + d\sin(2x), \qquad b, c, d \in \mathbb{R}. \tag{*}$$

Cette solution générale est contenue (il s'agit en fait d'un sous-espace vectoriel de dimension 3) dans la solution générale de l'équation (1).

3. Il suffit d'observer qu'une solution $y(x) = ae^{2x} + be^{-2x} + c\cos(2x) + d\sin(2x)$ de l'équation (1) est bornée sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $a = 0$. Autrement dit, si et seulement si elle est de la forme (*).

Exercice 3. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = y + 1$ et $g(x, y) = (y - x^2)(y - x^4)$. On s'intéresse au problème de minimisation sous contrainte :

$$\min\{f(x, y) \colon g(x, y) = 0\}.$$

1. Trouver les 3 points où la contrainte $g = 0$ est dégénérée.
2. Démontrer que l'un de ces 3 points est un minimiseur de f sous la contrainte $g = 0$.
3. Écrire la Lagrangienne $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ associée au problème de minimisation. Le minimiseur (x_0, y_0) trouvé à la question 2, correspond-il à un point stationnaire de la Lagrangienne ?

Solution.

1. Les fonctions f et g sont de classe C^1. La contrainte $g = 0$ es dégénérée au point (x, y) si et seulement si on a

$$g(x, y) = 0, \qquad \text{et} \qquad \nabla g(x, y) = 0.$$

Cela se traduit par le système

$$\begin{cases} (y - x^2)(y - x^4) = 0 \\ -2x(y - x^4) - 4x^3(y - x^2) = 0 \\ (y - x^4) + (y - x^2) = 0. \end{cases}$$

Mais on voit facilement que ce système équivaut à $\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ y - x^4 = 0 \end{cases}$. Les solutions sont alors $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-1, 1)$.

2. Vérifions que $(0,0)$ est notre minimiseur. En effet, $(0,0)$ vérifie bien la contrainte, de plus $f(0,0)=1$. Ensuite on a $g(x,y)=0$ si et seulement si $y=x^2$ ou $y=x^4$. Dans les deux cas, on voit que $g(x,y)=0 \Rightarrow y \geq 0$. Donc

$$\min\{y+1\colon g(x,y)=0\} \geq \min\{y+1\colon y \geq 0\} \geq 1.$$

Cela nous permet de dire que

$$\min\{f(x,y)\colon g(x,y)=0\} = f(0,0) = 1.$$

3. La Lagrangienne associée au système est la fonction

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = y + 1 + (y-x^2)(y-x^4).$$

Calculons, par exemple,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 1 + \lambda(y-x^4) + \lambda(y-x^2).$$

Un point de la forme $(0,0,\lambda_0)$ ne peut pas satisfaire $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$. Donc, le minimiseur trouvé à la question précédente ne correspond pas à un point stationnaire de la lagrangienne.

Rappelons, d'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange, qu'un minimiseur de f sous la contrainte $g=0$ est toujours à chercher parmi les points stationnaires de la Lagrangienne, ou bien parmi les points où la contrainte est dégénérée.