Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
27 mai 2018

Analyse pour l'économie 2. Examen de session 2

Durée 1h30.

Question de cours. Donner un exemple d'un espace métrique complet et un exemple d'un espace métrique non complet.

Exercice 1. Soit $a > 0$ et $R > 1$. Soit $A_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R\}$.

1. Calculer l'intégrale triple
$$\iiint_{A_R} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^a} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
à l'aide d'un changement en coordonnées sphériques. (Distinguer les cas $a = \frac{3}{2}$ et $a \neq \frac{3}{2}$).
2. Trouver les valeurs de a telles la limite
$$L_a = \lim_{R\to+\infty} \iiint_{A_R} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^a} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
existe finie et la calculer.

Exercice 2. On considère les équations différentielles :

$$y'''' - 16y = 0, \qquad \text{et} \tag{1}$$
$$y''' + 2y'' + 4y' + 8y = 0. \tag{2}$$

.

1. Trouver la solution générale de l'équation (1).
2. Trouver la solution générale de l'équation (2).
3. Déduire de ce qui précède qu'une fonction $x \mapsto y(x)$ (avec $x \in \mathbb{R}$) est solution de l'équation (2) si et seulement si $x \mapsto y(x)$ est une solution de l'équation (1) **bornée sur** $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = y + 1$ et $g(x, y) = (y - x^2)(y - x^4)$. On s'intéresse au problème de minimisation sous contrainte :

$$\min\{f(x, y) \colon g(x, y) = 0\}.$$

1. Trouver les 3 points où la contrainte $g = 0$ est dégénérée.
2. Démontrer que l'un de ces 3 points est un minimiseur de f sous la contrainte $g = 0$.
3. Écrire la Lagrangienne $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ associée au problème de minimisation. Le minimiseur (x_0, y_0) trouvé à la question 2, correspond-il à un point stationnaire de la Lagrangienne ?