Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
10 mai 2017

# Analyse pour l'économie 2. Examen de 1ère session

La durée de totale de l'epreuve est de deux heures. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Barème indicatif : 6 points par exercice.

**Exercice 1.** On considère le solide de $\mathbb{R}^3$ défini par
$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0,\ y \geq 0\, z \geq 0,\ x + y + z \leq 1\}$.

1. Calculer le volume de $D$.
2. Trouver les coordonnées du centre de gravité, en supposant le solide de densité constante. (*Indication :* il suffit de calculer l'abscisse du centre de gravité. Les deux autres coordonnées se déduisent par symétrie.)

**Exercice 2.** Justifier l'existence et ensuite calculer le minimum et le maximum de la fonction $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$, sous les contraintes $x + y - z = 0$ et $x^2 + 2z^2 = 1$.

**Exercice 3.** Soit $g(x, y) = x^4 + y^4 + x^3 + y^3$. On se propose d'étudier la courbe $\Sigma$ de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation

$$g(x, y) = 0.$$

1. Trouver les points dégénérés de $\Sigma$, c'est à dire les points de la courbe qui annulent le gradient de $g$.
2. Démontrer qu'au voisinage de $(0, -1)$ la courbe $\Sigma$ définit implicitement une fonction $\phi$ vérifiant $y = \phi(x) \iff g(x, y) = 0$.
3. Donner les valeurs $\phi(0)$, $\phi'(0)$. Calculer ensuite $\phi''(0)$. (*Indication :* dériver deux fois l'identité $g(x, \phi(x)) = 0$ et remplacer ensuite $x = 0$).
4. Démontrer que $\Sigma$ est bornée. (*Indication :* si vous voulez utiliser les coordonnées polaires, il sera utile d'observer que $\cos^4\theta + \sin^4\theta \geq 1 - 2\cos^2\theta\sin^2\theta \geq \frac{1}{2}$).

**Exercice 4.** On considère le problème de Cauchy associé à l'équation différentielle de Bernoulli

$$\begin{cases} (t^2 + 1)y' = 4ty + 4t\sqrt{y}, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{P}$$

1. Effectuer le changement d'inconnue $z = \sqrt{y}$ : quelle est l'équation différentielle vérifiée par $z$ ?
2. Résoudre l'équation obtenue à la question précédente par la méthode de variation des constantes.
3. En déduire la solution $y \geq 0$ du problème (P).

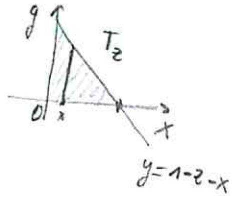
CORRIGÉ

$\boxed{\text{exercice 1}}$ $D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \ x,y,z \geq 0, \ x+y+z\leq 1\}$

On peut supposer la densité constante égale à 1. La masse M est,

$$M = \iiint_D 1\, dxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{T_z} 1\, dxdy\right) dz$$

, où $T_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ x,y\geq 0, \ x+y\leq 1-z\}$ (intégration par couches)




$$= \int_0^1 \left( \int_0^{1-z} \underbrace{\left(\int_0^{1-z-x} 1\, dy\right)}_{=1-z-x} dx\right) dz$$

$$= \int_0^1 \left( \int_0^{1-z} (1-z-x)\, dx\right) dz \underset{u=1-z-x}{=} \int_0^1 \left( \int_0^{1-z} u\, du\right) dz = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-z)^2 dz \underset{v=1-z}{=} \int_0^1 \frac{1}{2} v^2 dv = \frac{1}{6}$$

Donc $M = \frac{1}{6}$

$$x_G = \frac{1}{M}\iiint_D x\, dxdydz = 6\int_0^1 \left(\iint_{T_z} x\, dxdy\right) dz = 6\int_0^1 \left(\int_0^{1-z} x\left(\int_0^{1-z-x} 1\, dy\right) dx\right) dz$$

$$= 6\int_0^1 \left(\int_0^{1-z} (x-zx-x^2)\, dx\right) dz = 6\int_0^1 \left(\frac{(1-z)^2}{2} - \frac{z(1-z)^2}{2} - \frac{1}{3}(1-z)^3\right) dz$$

$$\underset{v=1-z}{=} 6\int_0^1 \left(\frac{v^2}{2} - \frac{(1-v)v^2}{2} - \frac{1}{3}v^2\right) dv = \cancel{6}\int_0^1 \frac{v^3}{\cancel{6}} dv = \frac{1}{4}$$

Donc $x_G = 1/4$

Mais alors $G = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ puisque D est invariant par rapport aux permutations des variables x, y et z.

$\boxed{\text{Exercice 2}}$

$f(x,y,z) = 3x - y - 3z.$

Soit $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0,\ x^2+2z^2=1\}$

$\Sigma$ est clairement fermé et

$(x,y,z) \in \Sigma \implies -1 \leq x \leq 1, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \implies -1-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq y \leq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}$

et donc $\Sigma$ est borné.

Mais alors $\Sigma$ est compact et $f$ possède min et max sur $\Sigma$, par le théorème de Weierstrass.

Dans $\Sigma$ on a $y = z - x$.

Étudions alors $\phi(x,z) = f(x, z-x, z) = 4x - 4z$, avec la contrainte $x^2+2z^2=1$.

Soit $g(x,z) = x^2+2z^2-1$ La contrainte n'est jamais dégénérée.

Soit $\mathcal{L}(x,z,\lambda) = 4x - 4z + \lambda(x^2+2z^2-1)$

$$\begin{cases} 4 + 2x\lambda = 0 \\ -4 + 4z\lambda = 0 \\ x^2+2z^2 = 1 \end{cases} \implies 2\lambda(x+2z) = 0 \implies x = -2z \quad (\text{car } \lambda \neq 0)$$

$$\implies 6z^2 = 1 \implies z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad x = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \lambda = \mp\sqrt{6}$$

Donc $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ et $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ sont les points pouvant être des point de min/max de $\phi$ dans la contrainte $x^2+2z^2=1$.

Mais, $\phi\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$

$\phi\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{+1}{\sqrt{6}}\right) = -2\sqrt{6}$

Donc $\max_{\Sigma} f = 2\sqrt{6}$ et $\min_{\Sigma} f = -2\sqrt{6}$

Exercice 3

$$g(x,y) = x^4 + y^4 + x^3 + y^3$$

$$\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}.$$

1) $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 3x^2 \\ 4y^3 + 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si $(x,y) = (0,0)$ ou $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

Mais seul $(0,0)$ appartient à $\Sigma$.

Donc $(0,0)$ est le seul point dégénéré de $\Sigma$.

2) $g(0,-1) = 1 - 1 = 0$ donc $(0,-1) \in \Sigma$.

$\frac{\partial g}{\partial y}(0,-1) = -4 + 3 \neq 0$ et on peut appliquer le théorème des fonctions implicites : au voisinage de $(0,-1)$ : $g(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x)$.

3) On a :

$0 = g(x, \phi(x)) = x^4 + \phi(x)^4 + x^3 + \phi(x)^3$, donc

(2) $0 = 4x^3 + 4\phi(x)^3 \phi'(x) + 3x^2 + 3\phi(x)^2 \phi'(x)$

(3) $0 = 12x^2 + 12\phi(x)^2 \phi'(x)^2 + 4\phi(x)^3 \phi''(x) + 6x + 6\phi(x)\phi'(x)^2 + 3\phi(x)^2 \phi''(x)$

et, au point $(0,-1)$ : $\phi(0) = -1$

(2) $\Rightarrow$ $0 = -4\phi'(0) + 3\phi'(0)$ $\Rightarrow$ $\phi'(0) = 0$

(3) $\Rightarrow$ $0 = -4\phi''(0) + 3\phi''(0)$ $\Rightarrow$ $\phi''(0) = 0$

4) $(x,y) \in \Sigma$, $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\rho^3\big(\rho(\underbrace{\cos^4\theta + \sin^4\theta}_{\geq 1/2}) + \cos^3\theta + \sin^3\theta\big) \geq \rho^3\big(\frac{1}{2}\rho + \underbrace{\cos^3\theta + \sin^3\theta}_{\geq -2}\big)$

$\geq \rho^3\left(\frac{1}{2}\rho - 2\right) > 0$ si $\rho > 4$

Donc $\Sigma$ est contenu dans le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 4.

Exercice 4

$$(t^2+1)y' = 4ty + 4t\sqrt{y}$$

1) Soit $z = \sqrt{y}$ , $y = z^2$ $y' = 2zz'$ ; $y(0) = 1 > 0$

$(t^2+1)\, 2zz' = 4tz^2 + 4tz$ $z(0) = 1 > 0$

2) Au voisinage de $z=0$, $z>0$

donc $(t^2+1)\, z' = 2tz + 2t$

$$z' = \frac{2tz}{t^2+1} + \frac{2t}{t^2+1}$$

$\int \frac{2t}{t^2+1}\, dt = \ln(t^2+1)$

$z(t) = K(t^2+1) + K(t)(t^2+1)$ où $K(t) = \int \frac{2t}{(t^2+1)^2}\, dt$

Donc $z(t) = K(t^2+1) - 1$ $= -(t^2+1)^{-1}$

3) Mais alors : $y(t) = \left(K(t^2+1) - 1\right)^2$

Mais on veut $1 = y(0) = (K-1)^2$ Donc $K = 2$ ou $K = 0$

Observons que $K=0$ est exclu, puisque $z(t) = \sqrt{y} \geq 0$

Donc $K = 2$

et la solution du problème est $y(t) = \left(2\,(t^2+1) - 1\right)^2$.