

Analyse pour l'économie 2. Examen de 1ère session

La durée de totale de l'épreuve est de deux heures. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Barème indicatif : 6 points par exercice.

Exercice 1. On considère le solide de \mathbb{R}^3 défini par

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

1. Calculer le volume de D .
2. Trouver les coordonnées du centre de gravité, en supposant le solide de densité constante.
(Indication : il suffit de calculer l'abscisse du centre de gravité. Les deux autres coordonnées se déduisent par symétrie.)

Exercice 2. Justifier l'existence et ensuite calculer le minimum et le maximum de la fonction

$$f(x, y, z) = 3x - y - 3z, \text{ sous les contraintes } x + y - z = 0 \text{ et } x^2 + 2z^2 = 1.$$

Exercice 3. Soit $g(x, y) = x^4 + y^4 + x^3 + y^3$. On se propose d'étudier la courbe Σ de \mathbb{R}^2 définie par l'équation

$$g(x, y) = 0.$$

1. Trouver les points dégénérés de Σ , c'est à dire les points de la courbe qui annulent le gradient de g .
2. Démontrer qu'au voisinage de $(0, -1)$ la courbe Σ définit implicitement une fonction ϕ vérifiant $y = \phi(x) \iff g(x, y) = 0$.
3. Donner les valeurs $\phi(0)$, $\phi'(0)$. Calculer ensuite $\phi''(0)$.
(Indication : dériver deux fois l'identité $g(x, \phi(x)) = 0$ et remplacer ensuite $x = 0$).
4. Démontrer que Σ est bornée.
(Indication : si vous voulez utiliser les coordonnées polaires, il sera utile d'observer que $\cos^4 \theta + \sin^4 \theta \geq 1 - 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \geq \frac{1}{2}$).

Exercice 4. On considère le problème de Cauchy associé à l'équation différentielle de Bernoulli

$$\begin{cases} (t^2 + 1)y' = 4ty + 4t\sqrt{y}, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (\text{P})$$

1. Effectuer le changement d'inconnue $z = \sqrt{y}$: quelle est l'équation différentielle vérifiée par z ?
2. Résoudre l'équation obtenue à la question précédente par la méthode de variation des constantes.
3. En déduire la solution $y \geq 0$ du problème (P).