Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie

Analyse pour l'économie 2. Examen de 2nde session

26 juin 2017, 14h00-15h30, salle Thémis 69

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. On considère le solide de $\mathbb{R}^3$ défini par $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$.

2 1. Calculer le volume de D à l'aide d'une intégrale triple.

2 2. Trouver les trois coordonnées du centre de gravité de D, en supposant le solide de densité constante.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$

$$x^2 y'' + y = 0. \qquad (*)$$

2 1. Poser $z(t) = y(e^t)$. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $t \mapsto z(t)$.

2 2. Trouver la solution générale de l'équation au point précédent et en déduire toutes les solutions de l'équation (*).

2 3. Déterminer l'unique solution y de l'équation (*) vérifiant les conditions $y(1) = 0$ et $y'(1) = 1$.

Exercice 3. On considère les deux surfaces suivantes de $\mathbb{R}^3$:
(a) la surface d'équation $z = xy$,
(b) la surface d'équation $x^2 + y^2 = 1$.
On note Γ la courbe de $\mathbb{R}^3$ donnée par l'intersection de ces deux surfaces.

1 1. Trouver les deux points où la courbe Γ intersecte l'axe x.

1 2. Paramétrer la courbe Γ.

2 3. Écrire les équations des droites tangente à la courbe Γ, aux deux points où celle-ci intersecte l'axe x.

2 4. Écrire, sans la calculer, l'intégrale donnant la longueur $\mathrm{long}(\Gamma)$ de la courbe Γ et trouver une constante $c \in]1, 2[$ telle que $2\pi \leq \mathrm{long}(\Gamma) \leq 2\pi c$.

Exercice 4. On considère l'espace X des fonctions continues et bornées : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On munit X de la distance $\delta(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$.

2 1. Calculer $\delta(f, g)$, lorsque $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$.

2 2. Considérons l'application $T \colon X \to X$ qui à toute fonction $f \in X$ associe la fonction $T(f) \in X$, définie par $T(f)(x) = \frac{1}{2} f(\frac{x}{3})$. Démontrer que T est Lipschitzienne et préciser une constante de Lipschitz.

2 3. Appliquer à T le théorème de point fixe : pourquoi ceci est-il légitime ? En déduire qu'il existe une et une seule fonction $f \in X$ telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2} f(\frac{x}{3}) = f(x)$. Trouver cette fonction f.

(1)

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$

1) $V = Vol(D) = \iiint_D 1 \, dx dy dz = \int_0^1 \left[\int_0^z \left(\int_0^y 1 \, dx \right) dy \right] dz = \int_0^1 \left[\int_0^z y \, dy \right] dz$

$= \int_0^1 \frac{1}{2} z^2 dz = \frac{1}{6}$

2) On peut supposer la densité constante $= 1$.

$x_G = \frac{1}{V} \iiint_D x \, dx dy dz = \frac{1}{V} \int_0^1 \left[\int_0^z \left(\int_0^y x dx \right) dy \right] dz = \frac{1}{V} \int_0^1 \left[\int_0^z \frac{1}{2} y^2 dy \right] dz = \frac{1}{V} \int_0^1 \frac{1}{6} z^3 dz = \frac{1}{V} \frac{1}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

$y_G = \frac{1}{V} \iiint_D y \, dx dy dz = \frac{1}{V} \int_0^1 \left(\int_0^z y^2 dy \right) dz = \frac{1}{V} \int_0^1 \frac{1}{3} z^3 dz = \frac{1}{V} \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$z_G = \frac{1}{V} \iiint_D z \, dx dy dz = \frac{1}{V} \int_0^1 \frac{1}{2} z^3 dz = \frac{1}{V} \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Donc $G = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right)$.

(2) $x^2 y'' + y = 0$, $x \in]0, +\infty[$.

1) Posons $x = e^t$; $z(t) = y(e^t)$.

Donc $\frac{d}{dt} z(t) = y'(e^t) e^t$; $\frac{d^2 z}{dt}(t) = y''(e^t) e^{2t} + y'(e^t) e^t = x^2 y'' + xy' =$

$= \underbrace{(x^2 y'' + y)}_{=0} + xy' - y = xy' - y = \frac{dz}{dt}(t) - z(t)$

Donc $\boxed{\frac{d^2 z}{dt} - \frac{dz}{dt} + z = 0}$

2) le polynôme caractéristique est $\lambda^2-\lambda+1=0$, qui a pour racines $\lambda=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Ainsi, $z(t)=e^{\frac{1}{2}t}\left(A\cos\sqrt{\frac{3}{2}}t+B\sin\sqrt{\frac{3}{2}}t\right)$, $A,B\in\mathbb{R}$.

Mais $y(x)=z(\ln x)$

Donc $y(x)=e^{\frac{1}{2}\ln x}\left(A\cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ln x\right)+B\sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ln x\right)\right)$

ou encore : $y(x)=\sqrt{x}\left(A\cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ln x\right)+B\sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ln x\right)\right)$, $A,B\in\mathbb{R}$.

3) On veut $\begin{cases} y(1)=0 \\ y'(1)=1 \end{cases}$, donc $0=A\cos 0+B\sin 0=A$

donc $y(x)=\sqrt{x}\,B\sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ln x\right)$

mais ensuite
$$y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}B\sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ln x\right)+\sqrt{x}\,B\cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ln x\right)\cdot\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$$
et on veut $y'(1)=1$. Cela donne :

$$1=\frac{B}{2}\cdot\sin 0+B\cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot 0\right)\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$$ Donc $B=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

En conclusion, $\boxed{y(x)=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ln x\right)}$ est la solution demandée

(3) (a) $z = xy$ (b) $x^2+y^2=1$ (dans $\mathbb{R}^3$)

1) l'axe x est la droite d'équations $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$.
Or, si Γ est la courbe obtenue par l'intersection de (a) et (b), Γ intersecte l'axe x aux points $(\pm 1, 0, 0)$

2) Une paramétrisation possible de Γ est:

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = \cos\theta \sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

3) On a vu que $\Gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta \end{pmatrix}$, donc $\Gamma'(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ \cos 2\theta \end{pmatrix}$

au point $(1,0,0) = \Gamma(0)$: $\Gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

au point $(-1,0,0) = \Gamma(\pi)$: $\Gamma'(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La droite tangente à Γ au point $(1,0,0)$ est la droite $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$
et la droite tangente à Γ au point $(-1,0,0)$ est la droite $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

4) $\mathrm{long}(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \|\Gamma'(\theta)\| \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta + \cos^2 2\theta} \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2(2\theta)} \, d\theta$

On voit alors que $2\pi \leq \mathrm{long}(\Gamma) \leq \sqrt{2}\, 2\pi$.

④

$$\delta(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)-g(x)|.$$

1) $\delta(\sin, \cos) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\sin x - \cos x| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})| = \sqrt{2}$

2) $T : X \to X$

$T(f)(x) = \frac{1}{2} f(\frac{x}{3})$.

$\delta(T(f), T(g)) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |T(f)(x) - T(g)(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{1}{2} f(\frac{x}{3}) - \frac{1}{2} g(\frac{x}{3})| =$

$= \frac{1}{2} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(\frac{x}{3}) - g(\frac{x}{3})| = \frac{1}{2} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| = \frac{1}{2}\delta(f,g)$

Donc $T : X \to X$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne

3) (X, δ) est un espace métrique complet et T est une contraction sur X.

Donc T possède un et un seul point fixe sur X.

Autrement dit, il existe une et une seule fonction $f \in X$ telle que $T(f) = f$, c'est-à-dire telle que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{2} f(\frac{x}{3}) = f(x).} \quad (*)$$

Or, la fonction nulle vérifie clairement $(*)$.

Donc la fonction nulle est la seule fonction de X vérifiant $(*)$.