

## Analyse pour l'économie 2. Examen de 1ère session

La durée de totale de l'épreuve est de deux heures. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

**Exercice 1.** Écrire l'équation cartésienne du plan tangent à la surface  $\Sigma$  de  $\mathbb{R}^3$ , paramétrée par

$$\begin{cases} x = uv, \\ y = 1 + 3u, \\ z = v^3 + 2u, \end{cases} \quad u, v \in \mathbb{R},$$

au point  $P_0 = (1, 4, 3)$ .

**Exercice 2.** Soit  $a > 0$  et  $R > 1$ . Soit  $A_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$ .

1. Calculer l'intégrale double

$$\iint_{A_R} \frac{1}{(x^2 + y^2)^a} dx dy$$

à l'aide d'un changement en coordonnées polaires. (Distinguer les cas  $a = 1$  et  $a \neq 1$ ).

2. Trouver les valeurs de  $a$  telles la limite

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{A_R} \frac{1}{(x^2 + y^2)^a} dx dy$$

existe finie et la calculer.

**Exercice 3.** Trouver une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont la solution générale est donnée par l'expression suivante :

$$e^{3x}(\alpha + \beta \cos(2x) + \gamma \sin(2x)), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 4** Établir l'existence et éventuellement calculer le maximum et le minimum de la fonction  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , où

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + x + y + 1}$$

dans chacune des situations suivantes :

1. Sous la contrainte  $x^2 + y^2 = 1$ .
2. Sous la contrainte  $x^2 + y^2 \leq 1$ .