Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
22 mai 2019

Analyse pour l'économie 2

Durée 2h00.

Exercice 1.

1. En utilisant le changement de variables en coordonnées sphériques,
$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi, \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi[\text{ et } \varphi \in [0, \pi],$$
calculer l'intégrale
$$\iiint_D z \, dx \, dy \, dz,$$
où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ et } z \geq 0\}$ et $R > 0$.
2. Donner la valeur des intégrales suivantes, sans faire de calcul
$$\iiint_D x \, dx \, dy \, dz \qquad \text{et} \qquad \iiint_D y \, dx \, dy \, dz.$$

Exercice 2. On considère la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy$.

1. Étudier l'existence et éventuellement calculer les extrema de f lorsque x et y sont soumis à la contrainte $x^2 + y^2 = 8$.
2. Étudier l'existence et éventuellement calculer les extrema de f lorsque x et y sont soumis à la contrainte $x^2 + y^2 \leq 8$.
3. Étudier l'existence et éventuellement calculer les extrema de f lorsque x et y sont soumis à la contrainte $x^2 + y^2 \geq 8$.

Exercice 3. On considère les deux surfaces Σ_1 et Σ_2 de $\mathbb{R}^3$
$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \; x^2 + y^2 = 1\} \qquad \text{et} \qquad \Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \; x^2 + z^2 = 1\}.$$
Soit Γ la courbe de $\mathbb{R}^3$ donnée par l'interserction $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Soit d la droite tangente, au point $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, à cette courbe Γ.

1. Dessiner ou décrire en quelques mots Σ_1 et Σ_2. Ces deux surfaces sont-elles compactes ? Et Γ est elle-compacte ?
2. Écrire une paramétrisation de la courbe Γ, à l'aide de fonctions trigonométriques.
3. Écrire l'équation paramétrique de la droite d, et en déduire un système donnant d comme l'intersection de deux plans de $\mathbb{R}^3$.
4. Montrer que Γ est de même longueur que l'ellipse d'équation $x^2 + y^2/2 = 1$. (Ne pas calculer cette longueur, on se limitera à observer que dans les deux cas on trouve la même intégrale).

T.S.V.P.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -9x^2. \tag{E}$$

1. Trouver $a > 0$ tel que la fonction $y_0(x) = ax$ soit une solution de (E).
2. Considérer le changement d'inconnue $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$, et écrire l'équation différentielle linéaire (E') satisfaite par $z(x)$.
3. Trouver la solution générale de l'équation différentielle (E') sur $]0, +\infty[$.
4. Trouver toutes les solutions $y(x)$ de l'équation différentielle (E) définies sur tout l'intervalle $]0, +\infty[$.