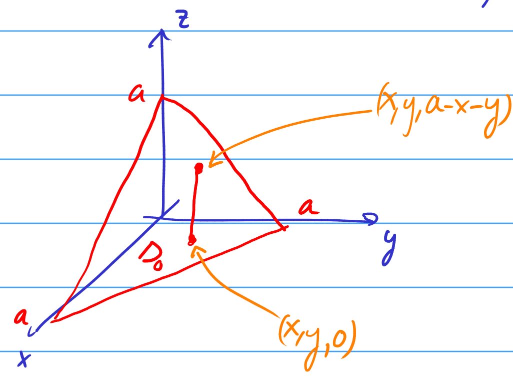
$\boxed{\text{EXERCICE 1}}$ $I = \iiint_D x\,dx\,dy\,dz$, $D = \{(x,y,z) : \begin{array}{l} x,y,z \geq 0 \\ x+y+z \leq a \end{array}\}$

$$I = \iint_{D_0} \left[\int_0^{a-x-y} x\,dz \right] dx\,dy$$ avec $D_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq a \end{array}\}$

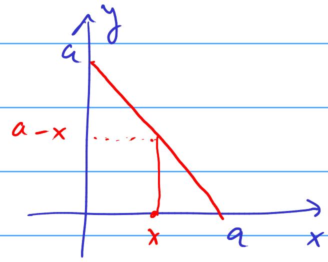


$$= \iint_{D_0} (ax - x^2 - xy)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^a \left[\int_0^{a-x} (ax - x^2 - xy)\,dy \right] dx$$

$$= \int_0^a \left((ax - x^2)(a-x) - \frac{x}{2}(a-x)^2 \right) dx$$

$$= \int_0^a \left(a^2x - ax^2 - ax^2 + x^3 - \frac{x}{2}a^2 + 2ax^2 - \frac{x^3}{2} \right) dx$$



$$= \frac{1}{2}a^4 - \cancel{\frac{2}{3}a^4} + \cancel{\frac{1}{4}a^4} - \cancel{\frac{1}{4}a^4} + \cancel{\frac{2}{3}a^4} - \frac{1}{8}a^4 = \frac{3a^4}{8}$$

Exercice 2

(P) $\quad \operatorname{Max}\{x^2+y^2 : x^4+y^4=1\}$

L'ensemble $\Sigma = \{(x,y) : x^4+y^4=1\}$ est fermé et borné (donc compact) et $f(x,y)=x^2+y^2$ est continue. Donc (P) possède une solution par le théorème de Weierstrass.

La Lagrangienne associée à (P) est $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(x^4+y^4-1)$.

Ses points stationnaires sont les solutions du système :

$$\begin{cases} 2x+4\lambda x^3=0 \\ 2y+4\lambda y^3=0 \\ x^4+y^4=1 \end{cases}$$

Si $x=0$, alors $y=\pm 1$, $\lambda=-\frac{1}{2}$

Si $y=0$, alors $x=\pm 1$, $\lambda=-\frac{1}{2}$

Si $x\neq 0$ et $y\neq 0$: $\Rightarrow \lambda\neq 0$

$$\begin{matrix} 1+2\lambda x^2=0 \\ 1+2\lambda y^2=0 \end{matrix} \Rightarrow x^2=y^2=-\frac{1}{2\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}=1 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x=\pm 2^{-1/4}$$

et $y=\pm 2^{-1/4}$

Les points stationnaires de $\mathcal{L}$ sont :

$$\underbrace{(\pm 1,0)}_{\lambda=-\frac{1}{2}} \qquad \underbrace{(0,\pm 1)}_{\lambda=-\frac{1}{2}} \qquad \underbrace{(\pm 2^{-1/4},\pm 2^{-1/4})}_{\lambda=-1/\sqrt{2}}$$

D'autre part la contrainte $x^4+y^4=1$ n'est jamais dégénérée, donc les solutions du problème de maximisation sont à chercher parmi les points précédents. Un calcul direct montre que les quatre points $(\pm 2^{-1/4};\pm 2^{-1/4})$ sont tous des maximiseurs et que le maximum cherché vaut

$$(2^{-1/4})^2+(2^{-1/4})^2=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Le problème (P') $\max\{x^2+y^2 : x^4-y^4=1\}$ n'a pas de solution. En effet, si on prend $n\in\mathbb{N}^*$, $x_n=1$ $y_n=(n^4-1)^{1/4}$ on voit que

$$x_n^4+y_n^4=1 \quad \text{et} \quad x_n^2+y_n^2 = 1+(n^4-1)^{1/2} \longrightarrow +\infty$$

Donc $\sup\{x^2+y^2 : x^4-y^4=1\} = +\infty$.

Observons que l'ensemble qui définit la contrainte n'est pas compact.

Exercice 3

$$(\Gamma)\quad \begin{cases} x^2+y^2-2z=0 \\ x^2+y^2+z^2-2x=0 \end{cases}$$

Si $z=\frac{1}{2}$ et $y>0$, alors $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2+\frac{1}{4}-2x=0 \end{cases}$

Donc $x=\frac{5}{8}$ $\quad y^2=1-\frac{25}{64}=\frac{39}{64}$

Le point cherché est donc $A=\left(\frac{5}{8},\frac{\sqrt{39}}{8},\frac{1}{2}\right)$.

Si $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z$ et $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x$

On a $\nabla f=\begin{pmatrix}2x\\2y\\-2\end{pmatrix}$ $\qquad \nabla g=\begin{pmatrix}2x-2\\2y\\2z\end{pmatrix}$

$\nabla f(A)=\begin{pmatrix}5/4\\ \sqrt{39}/4\\ -2\end{pmatrix}$ $\qquad \nabla g(A)\begin{pmatrix}-3/4\\ \frac{\sqrt{39}}{4}\\ 1\end{pmatrix}$

le plan tangent à la surface $\Sigma_1 : f(x,y,z)=0$ en A est le plan d'équation

$$\frac{5}{4}\left(x-\frac{5}{8}\right)+\frac{\sqrt{39}}{4}\left(y-\frac{\sqrt{39}}{8}\right)-2\left(z-\frac{1}{2}\right)=0 \qquad (*)$$

le plan tangent à la surface $\Sigma_2 : g(x,y,z)=0$ en A est : le plan d'équation :

$$-\frac{3}{4}\left(x-\frac{5}{8}\right)+\frac{\sqrt{39}}{4}\left(y-\frac{\sqrt{39}}{8}\right)+z-\frac{1}{2}=0 \qquad (**)$$

L'équation cartésienne de la droite tangente à Γ au point A est le système $\begin{cases}(*)\\(**)\end{cases}$ (= l'intersection des deux plans trouvés)

$\boxed{\text{Exercice 4}}$

$$(S)\quad \begin{cases} 4x = \sin(x+y) \\ 3y = 3 + 2\arctan(x-y) \end{cases}$$

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad \varphi(x,y) = \left(\frac{1}{4}\sin(x+y)\ ,\ 1+\frac{2}{3}\arctan(x-y)\right)$

1) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et $|f'(x)| \leq M$ $\forall x \in \mathbb{R}$, alors $|f(b)-f(a)| \leq M\,|b-a|$ par l'inégalité des accroissements finis.
En appliquant ceci avec $f(x) = \sin x$ (et $M=1$)
ou $f(x) = \arctan x$ (et $M=1$)
On trouve les inégalités cherchées

2) $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$; $(x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\|\varphi(x,y) - \varphi(x',y')\|_1 = \frac{1}{4}\left|\sin(x+y) - \sin(x'+y')\right| + \frac{2}{3}\left|\arctan(x-y) - \arctan(x'-y')\right|$$

$$\underset{(\text{question } 1)}{\leq} \frac{1}{4}\left|x+y-(x'+y')\right| + \frac{2}{3}\left|x-y-(x'-y')\right|$$

$$\leq \frac{1}{4}\left(|x-x'|+|y-y'|\right) + \frac{2}{3}\left(|x-x'|+|y-y'|\right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)}_{=\frac{11}{12}} \|(x,y)-(x',y')\|_1$$

Donc φ est une application k-lipschitzienne, avec $k = \frac{11}{12} < 1$.

3) En particulier $\varphi : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ est une contraction.
Comme l'espace $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ est complet par le théorème de point fixe il existe un et un seul point (x_0,y_0) tel que $\varphi(x_0,y_0) = (x_0,y_0)$. Mais les solutions de (S) sont exactement les points fixes de φ. Donc (S) possède une et une seule solution.

EXERCICE

$$\begin{cases} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' + y' - x \end{cases}$$

$(x-y)'' = x-y$

$(x+y)'' = (x+y)' - (x+y)$

Posons $\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$

On a alors $u'' - u = 0$ et $v'' - v' + v = 0$

Les polynômes caractéristiques sont, respectivement :

$\lambda^2 - 1$ et $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

racines $\lambda = \pm 1$ racines $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Donc $u(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{-t}$ $v(t) = e^{\frac{1}{2}t}\left(\gamma \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + \delta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)\right)$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Donc
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{u(t) + v(t)}{2} = \alpha e^{t} + \beta e^{-t} + e^{\frac{1}{2}t}\left(\gamma \cos \sqrt{\frac{3}{2}} t + \delta \sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, t\right)\right) \\ y(t) = \dfrac{v(t) - u(t)}{2} = e^{\frac{1}{2}t}\left(\gamma \cos \sqrt{\frac{3}{2}}\, t + \delta \sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, t\right)\right) - \alpha e^{-t} - \beta e^{-t} \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.