

Analyse pour l'économie 2. Examen de session 1 session. 25 mai 2022

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. Calculer l'intégrale triple

$$\iiint_D x \, dx \, dy \, dz,$$

où D est le domaine de \mathbb{R}^3 limité par l'équation $x + y + z = 3$ et les conditions $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Exercice 2. Soit Γ la courbe de \mathbb{R}^3 définie par implicitement par

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0. \end{cases}$$

Déterminer le point A de Γ tel que $z = 1/2$ et $y > 0$. Déterminer la droite tangente à Γ en A .

Exercice 3. Étudier l'existence et éventuellement trouver les solutions des deux problèmes d'optimisation

$$\max\{x^2 + y^2 : x^4 + y^4 = 1\} \quad \text{et} \quad \max\{x^2 + y^2 : x^4 - y^4 = 1\}$$

Exercice 4. On s'intéresse au système

$$\begin{cases} 4x = \sin(x + y) \\ 3y = 3 + 2 \arctan(x - y) \end{cases} \quad (S)$$

1. Démontrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a| \quad \text{et} \quad |\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|.$$

2. On munit \mathbb{R}^2 de la norme $\|\cdot\|_1$, définie par $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ et on considère l'application

$$\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi(x, y) = \left(\frac{1}{4} \sin(x + y), 1 + \frac{2}{3} \arctan(x - y) \right).$$

Trouver une constante $K < 1$ telle que,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2: \quad \|\psi(x, y) - \psi(x', y')\|_1 \leq K \|(x, y) - (x', y')\|_1.$$

3. En déduire que (S) possède une et une seule solution dans \mathbb{R}^2 .

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des fonctions x et y de la variable t , solutions du système différentiel

$$\begin{cases} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' + y' - x \end{cases}$$