Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie
26 mai 2021

Analyse pour l'économie 2

Durée 2h00.

Exercice 1.

1. Démontrer que, si une fonction deux fois dérivable $y\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle
$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \tfrac{1}{4})y(x) = 0, \qquad x > 0 \tag{1}$$
alors la fonction u définie pour $x > 0$ par $u(x) = x^{1/2}y(x)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle de la forme
$$u'' + au' + bu = 0 \qquad \text{(avec } a, b \text{ réels à déterminer).}$$
2. En déduire la solution générale de l'équation différentielle (1).
3. Démontrer que toutes les solutions de (1) convergent vers 0 pour $x \to +\infty$. Que peut-on dire de la limite pour $x \to 0+$?

Exercice 2. Calculer les intégrales triples
$$I_0 = \iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \qquad I_1 = \iiint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \qquad I_2 = \iiint_D z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

- dans le cas où D est le cube $[-R, R]^3$, avec $R > 0$,
- dans le cas où D est la boule de centre O et rayon $R > 0$.

(*Indication : en fonction de la méthode choisie, l'une de ces formules pourra éventuellement être utile,* $\int_0^\pi \cos^2 t \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$ *et* $\int_0^\pi \cos t \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$).

Exercice 3. On considère la courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ paramétrée par
$$\varphi(t) = \Big(\sin t, \frac{\cos^2 t}{2 - \cos t}\Big), \qquad t \in [-\pi, \pi].$$
Déterminer :

a) Les symétries de Γ. (*Indication : comparer* $\varphi(t)$ *et* $\varphi(-t)$).
b) Les quatre points d'intersection de Γ avec les axes x et y.
c) Le plus petit rectangle (avec les côtés parallèles aux axes) contenant Γ.
d) Les deux points singuliers et la tangente à la courbe en ces points.
(On pourra se limiter à analyser un point singulier et raisonner par symétrie pour l'autre. Pour calculer la limite donnant la pente de la droite tangente on pourra appliquer deux fois le théorème de l'Hôpital, ou sinon des développements limités à l'ordre 2).

Dessiner ensuite Γ.

Exercice 4. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(x^{2/3})$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et pour $x = 0$. Ensuite démontrer, à l'aide du théorème de point fixe pour les applications contractantes, que l'équation
$$x = \cos(x^{2/3}), \qquad \text{où } x \in \mathbb{R}$$
possède une et une seule solution réelle.
(*Indication : on rappelle les inégalités, valables pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \le 1$ *et* $|\sin t| \le |t|$).

(1.1) $x>0$

$u(x)=x^{1/2}y(x)$. Comme y est deux fois dérivable pour $x>0$, u l'est aussi.

$$y(x)=x^{-1/2}u(x)$$
$$y'(x)=-\frac12 x^{-3/2}u(x)+x^{-1/2}u'(x) \qquad \forall x>0$$
$$y''(x)=\frac34 x^{-5/2}u(x)-x^{-3/2}u'(x)+x^{-1/2}u''(x)$$

$$0=x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac14\right)y=\cancel{\frac34 x^{-1/2}u}-\cancel{x^{1/2}u'}+x^{3/2}u''-\cancel{\frac12 x^{-1/2}u}+\cancel{x^{1/2}u'}+x^{3/2}u-\cancel{\frac14 x^{-1/2}u}$$

Donc $\quad x^{3/2}u''+x^{3/2}u=0 \qquad \forall x>0$

Donc $\quad u''+u=0 \qquad \forall x>0$. On trouve ainsi $\boxed{a=0 \text{ et } b=1}$

(1.2) La solution générale de $u''+u=0$ est $u(x)=A\cos x+B\sin x$, $(A,B\in\mathbb{R})$

Donc la solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'éq. diff. de la question 1 est :

$$y(x)=\frac{A\cos x}{\sqrt{x}}+\frac{B\sin x}{\sqrt{x}}, \qquad (A,B\in\mathbb{R})$$

(1.3)

$\forall A,B\in\mathbb{R} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{A\cos x}{\sqrt{x}}+\frac{B\sin x}{\sqrt{x}}=0 \quad$ (puisque $|\sin x|\le 1$, $|\cos x|\le 1$)

$\forall B$: $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{A\cos x}{\sqrt{x}}+\frac{B\sin x}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{A\cos x}{\sqrt{x}} \quad$ (puisque $\sin x \underset{x\to0^+}{\sim} x$)

$$=\begin{cases}0 & \text{si } A=0\\ +\infty & \text{si } A>0\\ -\infty & \text{si } A<0\end{cases}$$

(2.1) $D=[-R,R]^3 \qquad I_0=8R^3$ (le volume du cube)

$$I_1=\left(\iint_{[-R,R]^2}dx\,dy\right)\underbrace{\left(\int_{-R}^{R}z\,dz\right)}_{=0}=0$$
(On pouvait dire aussi que $I_1=0$ par symétrie)

$$I_2=\left(\iint_{[-R,R]^2}dx\,dy\right)\left(\int_{-R}^{R}z^2\,dz\right)=4R^2\cdot\frac43 R^3=\frac83 R^5$$

D = Boule de centre O et rayon R > 0

$I_0 = \frac{4}{3}\pi R^3$ (volume de la Boule)

$I_1 = 0$ par symétrie (ou par calcul direct en coordonnées sphériques)

$$I_2 = \iiint_D z^2 \, dx dy dz = \iiint_{[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]} \rho^2 \cos^2\varphi \; \rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\theta d\varphi = \dots$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \rho \cos\theta \sin\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \\ dx dy dz = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\theta d\varphi \end{array}}$$

$\theta \in [0, 2\pi]$ longitude, $\rho \in [0, R]$

$\varphi \in [0, \pi]$ co-latitude

(d'après la formule du changement de variables en coordonnées sphériques)

$$\dots = \left(\int_0^R \rho^4 d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi\right) = \frac{1}{5}R^5 \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi}_{= 2/3}$$

Mais $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \left[-\cos^3\varphi\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi$

Donc $\displaystyle 3\int_0^{\pi} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \left[-\cos^3\varphi\right]_0^{\pi} = 2$

Conclusion : $I_2 = \frac{4\pi}{15} R^5$

Autre méthode : Par symétrie : $\displaystyle\iiint_D x^2 dx dy dz = \iiint_D y^2 dx dy dz = \iiint_D z^2 dx dy dz$

Donc $\displaystyle I_2 = \iiint_D z^2 \, dx dy dz = \frac{1}{3}\iiint_D (x^2+y^2+z^2) \, dx dy dz = \frac{1}{3}\iiint_{[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi$

$$= \frac{1}{3}\left(\int_0^R \rho^4 d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{15}R^5 \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4\pi}{15} R^5$$

(3.1) $\varphi(t) = \left(\sin t, \dfrac{\cos^2 t}{2-\cos t}\right)$, $t \in [-\pi, \pi]$.

a) $\forall t \in [-\pi, \pi]$: $\varphi(-t) = \left(-\sin t, \dfrac{\cos^2 t}{2-\cos t}\right)$ qui est le point symétrique de $\varphi(t)$ par rapport à l'axe vertical.

Donc Γ est symétrique par rapport à l'axe y.

b) Γ intersecte l'axe y lorsque $\sin t = 0$, c'àd $t = 0, \pm\pi$

c'àd aux points $\boxed{(0,1)}$ et $\boxed{(0, 1/3)}$

Γ intersecte l'axe x lorsque $\dfrac{\cos^2 t}{2-\cos t} = 0$, c'àd lorsque $\cos t = 0$, c'àd pour $t = \pm\frac{\pi}{2}$

Les points d'intersection de Γ avec l'axe x sont alors $\boxed{(1,0)}$ et $\boxed{(-1,0)}$

c) $\forall t \in [-\pi, \pi]$, $-1 \leq \sin t \leq 1$

et $\begin{cases} 0 \leq \cos^2 t \leq 1 \\ 2 - \cos t \geq 1 \end{cases}$. Donc $0 \leq \dfrac{\cos^2 t}{2-\cos t} \leq 1$

Conclusion $\Gamma \subset [-1,1] \times [0,1]$ et ceci est le plus petit rectangle possible contenant Γ compte tenu des points de Γ précédemment trouvés

d) $\varphi'(t) = \left(\cos t, \dfrac{-2\cos t \sin t(2-\cos t) - \cos^2 t \sin t}{(2-\cos t)^2}\right)$

$\varphi'(t) = (0,0) \iff \cos t = 0 \iff t = \pm\frac{\pi}{2}$ (puisque $t \in [-\pi, \pi]$)

Les points singuliers sont alors $(1,0)$ et $(-1,0)$.

Vérifions qu'au point singulier $(1,0)$ il existe une droite tangente.

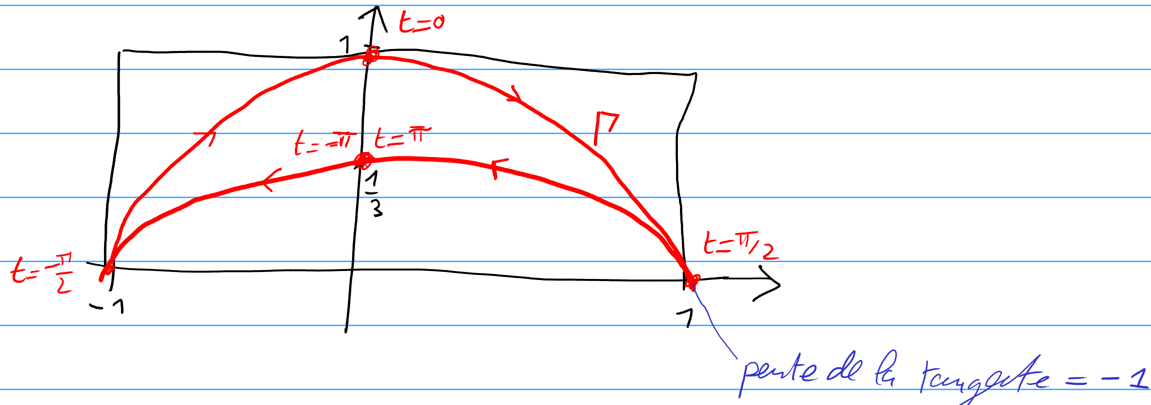
En effet, il existe la limite

$$m \underset{\text{déf}}{=} \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos^2 t}{2-\cos t} - 0}{\sin t - 1} = \underbrace{\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{(2-\cos t)\sin t - 2 + \cos t}}_{\text{F.I. } [\frac{0}{0}]}$$

$$\underset{\text{th. de l'Hôpital}}{=} \lim_{t \to} \frac{-2\cos t \sin t}{\underbrace{\sin^2 t + (2-\cos t)\cos t - \sin t}_{\text{F.I } [\frac{0}{0}] \text{ : on doit réappliquer l'Hôpital}}}$$

$$= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 t - 2\cos^2 t}{2\sin t \cos t - 2\sin t + 2\sin t \cos t + \cos t} = \frac{2}{-2} = -1$$

th. de l'Hôpital



Donc au point singulier $(1,0)$ il existe une droite tangente, qui est de pente -1
Par symétrie la pente de la tangente en $(-1,0)$ est 1

---

④ Soit $f(x) = \cos(x^{2/3})$, $x \in \mathbb{R}$.

$\forall x \neq 0$ $\quad f'(x) = -\frac{2}{3} x^{-1/3} \sin(x^{2/3})$

en $x=0$: $\quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(h^{2/3}) - 1}{h} \underset{\uparrow}{=} 0$

l'Hôpital

Donc f est dérivable dans $\mathbb{R}$

De plus $\forall x \neq 0$ $\quad |f'(x)| \leq \frac{2}{3}|x|^{-1/3}|\sin(x^{2/3})| \leq \begin{cases} \frac{2}{3}|x|^{-1/3}, & \forall\ |x| \geq 1 \\ \frac{2}{3}|x|^{-1/3} \cdot |x|^{2/3}, & \forall |x| \leq 1 \end{cases}$

$|\sin t| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
et $|\sin t| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Donc $\quad |f'(x)| \leq \frac{2}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc f est $\frac{2}{3}$-lipschitzienne dans $\mathbb{R}$: $\quad |f(x) - f(\tilde{x})| \leq \frac{2}{3}|x - \tilde{x}|$
$\forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$.

Mais alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est contractante, et comme $\mathbb{R}$ est complet, f possède un et un seul point fixe dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit :

$\exists!\ x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\quad f(x_0) = x_0$, c.à.d

$\exists!\ x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\quad x_0 = \cos(x_0^{2/3})$.