

Analyse pour l'économie 2

Durée 2h00.

Exercice 1.

1. Démontrer que, si une fonction deux fois dérivable $y: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \frac{1}{4})y(x) = 0, \quad x > 0 \quad (1)$$

alors la fonction u définie pour $x > 0$ par $u(x) = x^{1/2}y(x)$ est solution sur \mathbb{R}_+^* d'une équation différentielle de la forme

$$u'' + au' + bu = 0 \quad (\text{avec } a, b \text{ réels à déterminer}).$$

2. En déduire la solution générale de l'équation différentielle (1).
3. Démontrer que toutes les solutions de (1) convergent vers 0 pour $x \rightarrow +\infty$. Que peut-on dire de la limite pour $x \rightarrow 0+$?

Exercice 2.

Calculer les intégrales triples

$$I_0 = \iiint_D dx dy dz, \quad I_1 = \iiint_D z dx dy dz, \quad I_2 = \iiint_D z^2 dx dy dz,$$

- dans le cas où D est le cube $[-R, R]^3$, avec $R > 0$,
- dans le cas où D est la boule de centre O et rayon $R > 0$.

(Indication : en fonction de la méthode choisie, l'une de ces formules pourra éventuellement être utile, $\int_0^\pi \cos^2 t \sin t dt = \frac{2}{3}$ et $\int_0^\pi \cos t \sin^2 t dt = \frac{2}{3}$).

Exercice 3.

On considère la courbe Γ de \mathbb{R}^2 paramétrée par

$$\varphi(t) = \left(\sin t, \frac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \right), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Déterminer :

- a) Les symétries de Γ . (Indication : comparer $\varphi(t)$ et $\varphi(-t)$).
- b) Les quatre points d'intersection de Γ avec les axes x et y .
- c) Le plus petit rectangle (avec les côtés parallèles aux axes) contenant Γ .
- d) Les deux points singuliers et la tangente à la courbe en ces points.

(On pourra se limiter à analyser un point singulier et raisonner par symétrie pour l'autre. Pour calculer la limite donnant la pente de la droite tangente on pourra appliquer deux fois le théorème de l'Hôpital, ou sinon des développements limités à l'ordre 2).

Dessiner ensuite Γ .

Exercice 4.

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(x^{2/3})$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et pour $x = 0$. Ensuite démontrer, à l'aide du théorème de point fixe pour les applications contractantes, que l'équation

$$x = \cos(x^{2/3}), \quad \text{où } x \in \mathbb{R}$$

possède une et une seule solution réelle.

(Indication : on rappelle les inégalités, valables pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \leq 1$ et $|\sin t| \leq |t|$).