Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie

Analyse pour l'économie 2. Examen de session 1 session. 15 mai 2023

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

3 **Exercice 1.** Calculer

$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

où

1 1) D est le carré de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$ et $(1,0)$.
2 2) D est le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$.

5 **Exercice 2.** Quels sont les points de coordonnées ≥ 0 de la courbe d'équation $x^6+y^6=1$ les plus proches/éloignés de l'origine ? Quelle est leur distance à l'origine ?

(On pourra appliquer le théorème des multiplicateurs de Lagrange et optimiser la fonction $f(x,y)=x^2+y^2$ sous la contrainte $x^6+y^6=1$. Compte tenu de la symétrie du problème par rapport aux axes x et y, se limiter à chercher les points stationnaires de la Lagrangienne de coordonnées ≥ 0).

3 **Exercice 3.** 2 1) Calculer l'aire de la surface paramétrée par

$$\Psi(u,v)=\begin{pmatrix} u+v \\ 2-3u \\ 1+u-v \end{pmatrix}, \qquad (u,v)\in[0,1]\times[-1,1].$$

1 2) Observer que le verseur normal est constant (indépendant de u et v) : que peut-on dire de la surface ?

4 **Exercice 4.** Trouver la solution générale des équations différentielles

$$2 \quad y^{(4)}+y^{(3)}+y^{(2)}=0 \qquad \text{et} \quad 2 \; y^{(4)}+y^{(3)}+y^{(2)}=\cos t.$$

2 **Exercice 5.** Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose $z_n=e^{in}$.
1 1) Calculer $|z_{n+1}-z_n|$.
1 2) La suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle de Cauchy ?

6 **Exercice 6.** 3 1) On considère la fonction $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, définie par

$$f(x,y)=4x^2y+2x^3-4xy+2x+1,$$

quel est la nature des points critiques de f ?
3 2) Soit T le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Démontrer que le minimum de f sur le triangle T est atteint au point $(\frac{4-\sqrt{13}}{3}, \frac{-1+\sqrt{13}}{3})$. Quel est le point de T où $\max_T f$ est atteint ?

Université Lyon 1

UNIVERSITE LYON 1

Année universitaire : /

Diplôme : L2 Maths-Eco

Epreuve : Analyse

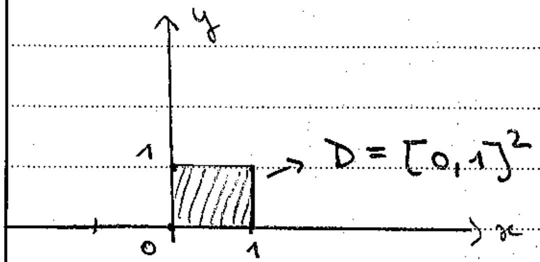
Date : 15/05/2023

NOTE : $4 + 5 + 3 + 4 + 2 + 6 = 24$

Numéro à reporter sur les intercalaires : 0591251 Nombre d'intercalaires : 3

Exercice 1 :

1)



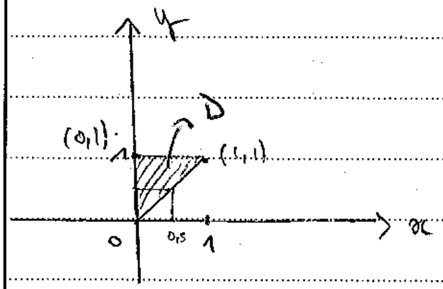
$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)}\,dx \int_0^1 \frac{1}{(1+y^2)}\,dy$$

$$= \arctan(1)^2$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$= \frac{\pi^2}{16}$$

2)



$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dx\,dy$$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x \leq y \leq 1 \}$.

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)} \left[\arctan(y)\right]_x^1 \,dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)} \times \left[\frac{\pi}{4} - \arctan(x)\right] dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \int_0^1 (\arctan(x))' \arctan(x) \, dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \left[\frac{1}{2} \arctan(x)^2\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^2.$$

Exercice 2.

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : x^6 + y^6 = 1\}$.

Ainsi : si $x \in D \iff x^6 = 1 - y^6 \leq 1$
ainsi $0 \leq x^6 \leq 1$ donc $x \in [0,1]$.
On raisonne de la même manière pour y.
On a donc $D \subset [0,1]^2$, donc D est borné.
Par ailleurs, D est fermé, on en déduit que D est compact.

$f(x,y) = x^2 + y^2$ étant continue, on en déduit par le théorème de Weierstrass, l'existence d'un maximum et d'un minimum global sur D.

On pose le Lagrangien : $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$
avec $g(x,y) = x^6 + y^6 - 1$.

$$\begin{cases} \nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6\lambda x^5 = 0 & L_1 \\ 2y + 6\lambda y^5 = 0 & L_2 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1 + 3\lambda x^4) = 0 & (L_1) \\ y(1 + 3\lambda y^4) = 0 & (L_2) \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 & (L_3) \end{cases}$$

pour (L_1) $x = 0$ ou $1 + 3\lambda x^4 = 0$
si $x = 0 \Rightarrow y = 1$ (on en déduit une condition sur $\lambda = -\frac{1}{3}$)
Ainsi $(0,1)$ est un point stationnaire.
De manière symétrique : si $y = 0 \Rightarrow x = 1$, donc $(1,0)$ est un point stationnaire.
~~Supposons que $1 + 3\lambda x^4 = 0$ avec $x \neq 0$~~
~~$\Rightarrow \lambda = \frac{-1}{3x^4}$~~

Supposons que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
On se retrouve avec le système :

$$\begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-1}{3x^4} & (1) \\ \lambda = \frac{-1}{3y^4} & (2) \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Par (1) et (2) on en déduit que :

$$\begin{cases} x^4 = y^4 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$ or $x > 0$ et $y > 0$ donc :

$$\begin{cases} x = y \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^6 - 1 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x^6 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$

Finalement on trouve les points stationnaires suivants :

$$(0,1),\ (1,0) \text{ et } \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}, \sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)$$

Regardons les points où la contrainte est dégénérée :

$$\begin{cases} \nabla g(x,y) = (0,0) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^5 = 0 \\ 6y^5 = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 = 0 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution

$$f(0,1) = f(1,0) = 1 \quad f\left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}, \sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right) = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Les points les plus proches sont à une distance de $\left(2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^{1/2}$, les plus éloignés d'une distance de 1.

Exercice 3 :

1) $\Psi(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ 2-3u \\ 1+u-v \end{pmatrix}$ on calcule $\Psi_u(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Psi_v(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Psi_v \wedge \Psi_u = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3\vec{i} - \vec{j}(-1-1) + \vec{k}(0-(-3))$$

Ainsi $\Psi_v \wedge \Psi_u = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

On en déduit que $\|\Psi_v \wedge \Psi_u\| = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$.

On calcule : $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[-1,1]} \|\Psi_v \wedge \Psi_u\| \, dv\, du$

$$= \int_0^1 \int_{-1}^1 \sqrt{22}\, dv\, du = \sqrt{22} \times 1 \times 2 = 2\sqrt{22}$$

2) Le vecteur est donné par :

$$v = \frac{\Psi_u(u_0,v_0) \wedge \Psi_v(u_0,v_0)}{\| \Psi_u \wedge \Psi_v \|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{indépendant de } u_0 \text{ et } v_0$$

On en déduit que cette surface est un plan.

Exercice 4.

1) $y^{(4)} + y^{(3)} + y^{(2)} = 0$

On pose le polynôme caractéristique :

$$\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 (\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

Ainsi $\lambda_1 = 0$ est racine double.

$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ on calcule le discriminant

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ on en déduit 2 racines complexes distinctes conjuguées :

$$\lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \qquad \lambda_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi les solutions générales sont de la forme :

$$t \longmapsto a + bt + e^{-\frac{1}{2}t}\left(\lambda_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

$a, b, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

2) Soit $y^{(4)} + y^{(3)} + y^{(2)} = \cos t = e^{0t}(\cos t)$

On cherche une solution particulière de la forme :

$$y(t) = \lambda t^2 \cos t$$

Ainsi $y'(t) = 2\lambda t \cos t - \lambda t^2 \sin t$

$$y''(t) = 2\lambda \cos t - 2\lambda t \sin t - 2\lambda t \sin t - \lambda t^2 \cos t$$

$$= 2\lambda \cos t - 4\lambda t \sin t - \lambda t^2 \cos t$$

$$y'''(t) = -2\lambda \sin t - 4\lambda \sin t - 4\lambda t \cos t - 2\lambda t \cos t + \lambda t^2 \sin t$$

$$= -6\lambda \sin t - 6\lambda t \cos t + \lambda t^2 \sin t$$

$$y^{(4)}(t) = -6\lambda \cos t + 6\lambda t \sin t - 6\lambda \cos t + 2t\lambda \sin t + \lambda t^2 \cos t$$

$$= -12\lambda \cos t + 8t\lambda \sin t + \lambda t^2 \cos t$$

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N° 1

~~Finalement :~~

~~$-12\lambda\cos t + 8t\lambda\sin t + \lambda t^2\cos t - 6\lambda\sin t - 6\lambda t\cos t + \lambda t^2\sin t$~~

~~$+ 2\lambda\cos t - 4\lambda t\sin t - \lambda t^2\cos t = \cos t$~~

~~$\Leftrightarrow -10\lambda\cos t - 6\lambda t\cos t - 6\lambda\sin t + 4\lambda t\sin t + \lambda t^2\sin t = \cos t$~~

~~λ~~

voir dernière page.

Exercice 5.

$z_n = e^{in}$

1) ~~$|z_{n+1} - z_n| = |e^{i(n+1)} - e^{in}|$~~

~~$= |e^{in}(e^{i}-1)|$~~

~~$= |e^{in}|\,|e^{i}-1|$~~

~~$= |e^{i}-1|$~~

1) $|z_{n+1} - z_n| = \left| e^{\frac{(2n+1)}{2}i} \left(e^{\frac{1}{2}i} - e^{-\frac{1}{2}i} \right) \right|$

$= \left| e^{\frac{(2n+1)}{2}i} \right| \left| 2i\sin\left(\frac{1}{2}\right) \right|$

$= \left| 2i\sin\left(\frac{1}{2}\right) \right|$

$= \sqrt{4 \times \left(\frac{\pi}{6}\right)^2}$

2) En posant $\varepsilon = 1$, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (p,m) \in \mathbb{R}^2$ (ici $p = n+1$, $m = n$) tel que $p \geq n$ et $m \geq n$ et $|z_p - z_m| > 1$
Donc la suite n'est pas de Cauchy.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N° 2

Exercice 6.

1) Soit $f(x,y) = 4x^2y + 2x^3 - 4xy + 2x + 1$.

$$f(x,0) = 2x^3 + 2x + 1$$

Ainsi $\lim_{x \to -\infty} f(x,0) = -\infty \Rightarrow f$ n'admet pas de minimum global.

De la même manière :
$\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = +\infty \Rightarrow f$ n'admet pas de maximum global.

Etudions les points critiques de f :

$$\begin{cases} \frac{\delta f(x,y)}{\delta x} = 0 \Leftrightarrow 8xy + 6x^2 - 4y + 2 = 0 \quad (L_1) \\ \frac{\delta f(x,y)}{\delta y} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x = 0 \quad (L_2) \end{cases}$$

L_2 donne que : $x^2 - x = 0 \Rightarrow x(1-x) = 0$
Ainsi $x = 0$ ou $x = 1$
si $x = 0$ on a par L_1 : $-4y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

Donc $(0, \frac{1}{2})$ est un point critique.
si $x = 1$ on a par L_1 : $8y + 6 - 4y + 2 = 0$
$\Rightarrow 4y + 8 = 0$
$\Rightarrow \boxed{y = -2}$

Deux points critiques : $(0, \frac{1}{2})$ et $(1, -2)$.

Calculons les dérivées secondes :

$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x^2} = 8y + 12x \qquad \frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta y^2} = 0$$

et $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 8x - 4$

Ainsi $\dfrac{\partial^2 f(0,\frac{1}{2})}{\partial x^2} = 4$ $\quad \dfrac{\partial^2 f(0,\frac{1}{2})}{\partial x \partial y} = -4$.

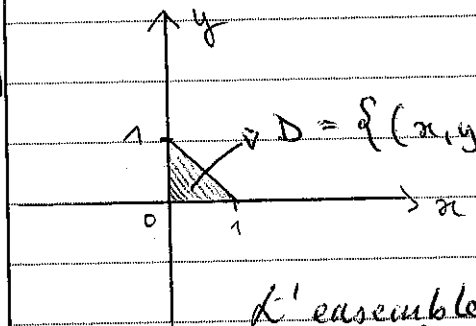
$H_f(0,\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

$\det H_f(0,\frac{1}{2}) = -(16) < 0 \Rightarrow (0,\frac{1}{2})$ est un point col.

De plus, $\dfrac{\partial^2 f(1,-2)}{\partial x^2} = 12 - 16 = -4$ $\quad \dfrac{\partial^2 f(1,-2)}{\partial x \partial y} = 4$.

$H_f(1,-2) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(1,-2) = -16 < 0$

Tous les points critiques sont des points cols.

2) 

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1-x\}$

L'ensemble D est très clairement compact, par le théorème de Weierstrass, f admet un maximum et un minimum sur D.

Comme f n'admet pas de point critique, ceux-ci sont atteints sur les bords.

Etudions ∂D :

- si $x = 0$ et $0 \leq y \leq 1$:

$f(x,y) = f(0,y) = 1 \quad \forall y \in [0,1]$

- si $y = 0$ et $0 \leq x \leq 1$

$f(x,y) = f(x,0) = 2x^3 + 2x + 1$

Comme cette fonction est ↑ sur $[0,1]$ on en déduit que le minimum est atteint en $x = 0$.

- si $0 \leq x \leq 1$ et $y = 1-x$

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x,1-x) &= 4x^2(1-x) + 2x^3 - 4x(1-x) + 2x + 1 \\ &= \underline{4x^2} - 4x^3 + 2x^3 - 4x + \underline{4x^2} + 2x + 1 \\ &= -2x^3 + 8x^2 - 2x + 1 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N° 3

On dérive :

$$g'(x) = -6x^2 + 16x - 2$$

$g'(x) = 0 \iff -6x^2 + 16x - 2 = 0$

$\iff -3x^2 + 8x - 1 = 0$

$\Delta = 64 - 4(-1 \times -3) = 64 - 12 = 52$

2 racines : $x_1 = \dfrac{-8 - \sqrt{52}}{-6}$ $\quad x_2 = \dfrac{-8 + \sqrt{52}}{-6}$

$x_2 = \dfrac{-4 \times 2 + \sqrt{13 \times 4}}{-3 \times 2} = \dfrac{4 - \sqrt{13}}{3}$ $\quad x_1 = \dfrac{4 + \sqrt{13}}{3} > 1$

On obtient le tableau de variation :

x	0	$\frac{4-\sqrt{13}}{3}$	1
$g'(x)$	$-$	ϕ	$+$
$g(x)$	$g(0)$ ↘		↗ $g(1) = -2+8-2+1 = 8-4+1 = 5$.

$$g\left(\frac{4-\sqrt{13}}{3}\right) < g(0) = 1$$

→ (par continuité de g)

Ainsi g atteint son minimum en $x = \dfrac{4-\sqrt{13}}{3}$

$y = 1 - x = \dfrac{3 - 4 + \sqrt{13}}{3} = \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{3}$

On remarque que $g(0) = 1$ et $g(1) = 5$, comme g est décroissante puis croissante, on en déduit par continuité, que le maximum de g donc de f est atteint en $(1, 0)$

Exercice 4.

2) On cherche une solution particulière :
de la forme $y(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$.

$y'(t) = -\alpha \sin t + \beta \cos t$

$y''(t) = -\alpha \cos t + (-\beta \sin t)$

non $\quad y'''(t) = -\alpha \sin t - \beta \cos t$

$y''''(t) = -\alpha \cos t + \beta \sin t$

$y^{(4)} + y^{(3)} + y^{(2)} = -\alpha \cancel{\cos t} + \beta \sin t - \alpha \sin t - \beta \cos t$
$- \alpha \cos t - \beta \sin t = \cos t.$

$\Leftrightarrow \quad (-2\alpha - \beta) \cos t - \alpha \sin t = \cos t.$

$\Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \quad \beta = -1.$

$y_p(t) = -\sin t.$

Solution générale:

$t \longmapsto a + bt + e^{-\frac{1}{2}t} \left(\lambda_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)\right)$
$- \sin t.$

STI [004] - 03 85 78 99 11 - REF. 20717