Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie

Analyse pour l'économie 2. Examen de session 1 session. 15 mai 2023

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. Calculer
$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
où
1) D est le carré de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$ et $(1,0)$.
2) D est le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$.

Exercice 2. Quels sont les points de coordonnées ≥ 0 de la courbe d'équation $x^6 + y^6 = 1$ les plus proches/éloignés de l'origine ? Quelle est leur distance à l'origine ?

(On pourra appliquer le théorème des multiplicateurs de Lagrange et optimiser la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $x^6 + y^6 = 1$. Compte tenu de la symétrie du problème par rapport aux axes x et y, se limiter à chercher les points stationnaires de la Lagrangienne de coordonnées ≥ 0).

Exercice 3. 1) Calculer l'aire de la surface paramétrée par
$$\Psi(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ 2-3u \\ 1+u-v \end{pmatrix}, \qquad (u,v) \in [0,1]\times[-1,1].$$
2) Observer que le verseur normal est constant (indépendant de u et v) : que peut-on dire de la surface ?

Exercice 4. Trouver la solution générale des équations différentielles
$$y^{(4)} + y^{(3)} + y^{(2)} = 0 \qquad \text{et} \qquad y^{(4)} + y^{(3)} + y^{(2)} = \cos t.$$

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $z_n = e^{in}$.
1) Calculer $|z_{n+1} - z_n|$.
2) La suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle de Cauchy ?

Exercice 6. 1) On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par
$$f(x,y) = 4x^2y + 2x^3 - 4xy + 2x + 1,$$
quel est la nature des points critiques de f ?

2) Soit T le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Démontrer que le minimum de f sur le triangle T est atteint au point $(\frac{4-\sqrt{13}}{3}, \frac{-1+\sqrt{13}}{3})$. Quel est le point de T où $\max_T f$ est atteint ?