Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies – L2
Mathématiques et Économie

Analyse pour l'économie 2. Examen de session 1. Année 2025

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. Soit $a > 0$ et D le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,a)$. Calculer

$$\iint_D 2y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(Vérification de la réponse : s'assurer que dans le cas $a = 3$, l'intégrale est égale à 3).

Exercice 2. Soit Γ la courbe de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par l'application $\varphi\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$, définie par $\varphi(t) = (2t, \cos t, \sin t)$.

1. Calculer la longueur de Γ.
2. Trouver l'unique point de Γ où la droite tangente est horizontale (parallèle au plan xOy).

Exercice 3. Soit la courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ définie implicitement par l'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

1. Peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites en $(0,0)$? Expliquer.
2. Trouver un point $(a,b) \in \Gamma$ de cette courbe où l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites.
3. Écrire l'équation de la droite tangente à la courbe Γ au point (a,b) trouvé à la question précédente.

Exercice 4. Soit $f(x,y,z) = x + y + z$.

1. Démontrer l'existence, sans les calculer, du minimum m et du maximum M de f sous la contrainte $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} - 1 = 0$.
2. Écrire la Lagrangienne du problème d'optimisation et le système permettant de trouver les points de minimum et maximum.
3. En utilisant le théorème des multiplicateurs de Lagrange, calculer M et m et préciser les points où ils sont atteints.
   (Vérification de la réponse : $m = k\sqrt{3}$, où k est un entier que l'on trouvera avec les calculs).
4. Dans cette question on modifie la contrainte, par l'équation $\frac{-x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} - 1 = 0$.
   (a) Expliquer pourquoi le problème d'optimisation de f, sous cette nouvelle contrainte, a priori pourrait ne pas avoir de solution.
   (b) Démontrer que $\sup\{f(x,y,z)\colon \frac{-x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} - 1 = 0\} = +\infty$.