

Analyse pour l'économie 2. Khôlles du 4 mai 2017

Exercice 1. Définition d'espace de Banach et exemples. Expliquer la différence entre un espace métrique complet et un espace de Banach.

Exercice 2. Définition de contraction et exemple.

Exercice 3. Énoncer le théorème de point fixe.

Exercice 4. \mathbb{Z} est-il un espace complet pour la distance usuelle ? Et \mathbb{Q} ?

Exercice 5. Définition de solution maximale d'une équation différentielle.

Exercice 6. Quelle est la forme générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre 3 ?

Exercice 7. Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exercice 8. Donner la formule pour la solution générale de l'équation différentielle $y' + a(x) = b(x)$.

Exercice 9. Pour quelles valeurs de $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = t \ln u \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

possède-t-il une unique solution locale ?

Exercice 10. Que peut-on dire de la solution générale d'une équation différentielle de la forme

$$y''' + a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) ?$$

Exercice 11. Considérer l'équation différentielle d'ordre 2, $y''(x) = \cos(x + y'(x)y(x))$. Écrire un système différentielle d'ordre 1 équivalent à cette équation.

Exercice 12. Écrire l'équation paramétrique de la droite tangente au point $\varphi(t_0)$ de la courbe de \mathbb{R}^n paramétrée par l'application $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Exercice 13. Donner la définition de paramétrisation normale (ou par abscisse curviligne) d'une courbe.

Exercice 14. Donner la formule pour calculer la longueur d'une courbe paramétrée.

Exercice 15. Donner la définition de courbure et de rayon de courbure d'une courbe.

Exercice 16. Considérer la courbe de \mathbb{R}^3 paramétrée par $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$. Écrire l'équation paramétrique de la droite tangente à cette courbe au point $(1, 0, 0)$. Donner l'équation de 2 plans dont l'intersection est cette droite.

Exercice 17. Soit $a > b > 0$ et l'ellipse définie par l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Quel est le rayon de courbure au point $(a, 0)$?

Exercice 18. Donner la définition de difféomorphisme entre deux ouverts de \mathbb{R}^n .

Exercice 19. Écrire la formule de changement de variable pour les intégrales doubles.

Exercice 20. Définir les coordonnées sphériques.

Exercice 21. Comment calculer les coordonnées du centre de masse d'un solide occupant le volume D et de densité de masse $\rho(x, y, z)$?

Exercice 22. Donner l'expression du vecteur normal à une surface paramétrée en un point de celle-ci.

Exercice 23. Donner l'équation du plan tangent à une surface paramétrée en un point de celle-ci.

Exercice 24. Donner la formule de l'aire d'une surface paramétrée.