1 Espaces métriques complets

1.1 Suites de Cauchy et espaces complets

Exercice 1. Vérifier de plusieurs manières si la suite réelle $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ est de Cauchy.

Exercice 2. Les suites de Cauchy sont-elles bornées ? Réciproquement, les suites bornées sont-elles de Cauchy ? Justifier.

Exercice 3. Etablir si les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}$ sont complets : $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $]0,1]$, $[0,+\infty[$, $\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Soit (x_n) une suite de Cauchy, telle qu'il existe une suite extraite (x_{n_k}) convergente vers $x \in X$. Démontrer qu'alors $x_n \to x$.

Exercice 5.
(i) Construire une suite de fonctions dérivables sur $[-1,1]$ qui converge uniformément vers la fonction $x \mapsto |x|$.
(ii) Soit $X = C^1([-1,1],\mathbb{R})$, l'ensemble de fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[-1,1]$. On munit X de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. X est-il un espace de Banach ?

Exercice 6. Soit $c_0 = \big\{(x_n) \subset \mathbb{R} \colon \lim_{n\to\infty} x_n = 0\big\}$. On munit c_0 de la norme $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Montrer que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

1.2 Contractions et points fixes

Exercice 7. Établir si $f(x) = \ln(1+x^2)$ est contractante en tant qu'application :
(i) $f\colon [2,+\infty[\to \mathbb{R}$, (ii) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, (iii) $f\colon]1,+\infty[\to\mathbb{R}$.

Exercice 8. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$. Donner une condition suffisante sur la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour que l'application $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ soit contractante. Même question lorsque l'on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$.

Exercice 9. Soient (X,d) un espace métrique complet, $f\colon X\to X$ et $k\in\mathbb{N}$. On suppose que $f\circ f$ est contractante. Montrer que f a exactement un point fixe.

Exercice 10. Démontrer le résultat de point fixe suivant : *Toute fonction continue $f\colon [0,1]\to[0,1]$ possède au moins un point fixe*. (On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $x\mapsto f(x)-x$).

Exercice 11.

1. Démontrer qu'une fonction $x = x(t)$ est solution du problème $(*)$ si et seulement si $x = x(t)$ est solution du problème $(**)$:

$$(*)\begin{cases} x\in C^1([-1,1],\mathbb{R}) \\ x'(t) = \dfrac{1}{2}\sin(x(t)) \quad \forall t\in[-1,1] \\ x(0) = 1. \end{cases} \qquad (**)\begin{cases} x\in C([-1,1],\mathbb{R}) \\ x(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t \sin(x(s))\,ds \quad \forall t\in[-1,1] \end{cases}$$

2. Soit $E = C([-1,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Définir une contraction $\phi\colon E\to E$ telle que x_0 est un point fixe pour ϕ si et seulement si x_0 est solution de $(**)$. Conclure que le problème $(*)$ possède une et une seule solution.

Exercice 12. Pour $x_0\in\mathbb{R}$, on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n$, $n\geq 0$. On veut montrer le résultat suivant : *il existe un unique choix de $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $(x_n)\subset[10,11]$*

1. Montrer que $Y = \{\,(y_n)\in\ell^\infty \colon (y_n)\subset[10,11]\,\}$, muni de la distance $d\big((y_n),(y'_n)\big) = \sup_n |y_n - y'_n|$ est complet.

2. Soit $F((y_n)) = (z_n)$, où $z_n = \sqrt{100 + y_{n+1} - \sin n}$. Montrer que $F\colon Y \to Y$ est bien définie et contractante.

3. Conclure.

Exercice 13. Soient $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \leq 5\}$. Trouver un ensemble (aussi grand que possible) de paramètres (α, β) tels que le système

$$\begin{cases} x = 2 + \alpha(1 + e^{x-5} + \cos y) \\ y = 3 + \beta(e^{x-5} - \sin y) \end{cases}$$

ait exactement une solution dans A.
(*Indication :* On pourra chercher une application contractante $\phi\colon (A, \|\cdot\|_1) \to (A, \|\cdot\|_1)$ où $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$).

2 Équations différentielles

2.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 14. Résoudre[1] dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2$
2. $y' + y = 2\sin x$
3. $y' - y = (x+1)e^x$
4. $y' + y = x - e^x + \cos x$

Exercice 15. Déterminer toutes les fonctions dérivables $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Exercice 16.

1. Résoudre l'équation différentielle $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$. Tracer les courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 3$.

2. Résoudre l'équation différentielle $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$ sur $]0, \pi[$. Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Exercice 17 (Variation de la constante)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0; +\infty[$
2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$
3. $x(1 + \ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 18. On considère l'équation différentielle

$$y' - e^x e^y = a$$

Déterminer ses solutions, en précisant soigneusement leurs intervalles de définition, pour

1. $a = 0$

[1] Cet exercice et les suivants de cette section sont issues d'une fiche de Léa Blanc-Centi

2. $a = -1$ (faire le changement de fonction inconnue $z(x) = x + y(x)$)

Dans chacun des cas, construire la courbe intégrale qui passe par l'origine.

Exercice 19. Pour les équations différentielles suivantes, trouver les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier :

1. $x^2y' - y = 0$ (E_1)
2. $xy' + y - 1 = 0$ (E_2)

Exercice 20. Rappeler l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz, ainsi que du théorème d'existence globale de solutions d'un problème de Cauchy. Démontrer que, pour tout t_0 et y_0 réels, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y| + |t| \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

possède une unique solution $y(t)$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour $(t_0, y_0) = (0, 1)$, construire cette solution.

(Indication : on commencera par le cas $t \geq 0$ et $y \geq 0$. Ensuite $t \leq 0$, ... Raccorder la solution en $t = 0$ et $t = -1$ en imposant la condition de dérivabilité).

2.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 21. Résoudre

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' + 2y' + 2y = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 0$
4. $y'' + y = 2\cos^2 x$

Exercice 22. On considère $y'' - 4y' + 4y = d(x)$. Résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière lorsque $d(x) = e^{-2x}$, puis $d(x) = e^{2x}$. Donner la forme générale des solutions quand $d(x) = \frac{1}{2}\cosh(2x)$.

Exercice 23. Résoudre sur $]0;\pi[$ l'équation différentielle $y'' + y = \operatorname{cotan} x$, où $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Exercice 24. Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable suggéré.

1. $x^2y'' + xy' + y = 0$, sur $]0;+\infty[$, en posant $x = e^t$;
2. $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + my = 0$, sur $\mathbb{R}$, en posant $x = \tan t$ (en fonction de $m \in \mathbb{R}$).

Exercice 25. Considérer le système différentiel

$$\begin{cases} u' + u - v = e^t \\ v' - 4u + v = t + 3. \end{cases}$$

Démontrer que u vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et la résoudre. En déduire la solution générale du système.

Exercice 26 (Équations de Bernoulli et Riccati)**.**

1. **Équation de Bernoulli**
   (a) Montrer que l'équation de Bernoulli
   $$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \qquad n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0, n \neq 1$$
   se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = 1/y(x)^{n-1}$.

(b) Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

2. **Équation de Riccati**

(a) Montrer que si y_0 est une solution particulière de l'équation de Riccati

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $n = 2$).

(b) Résoudre l'équation $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution.

Exercice 27.

1. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y' + e^{x^2}y = 0$ tend vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + e^{x^2}y = 0$ est bornée. (*Indication :* étudier la fonction auxiliaire $u(x) = y(x)^2 + e^{-x^2}y'(x)^2$.)

Exercice 28. 1. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle $x^2y'' + y = 0$ (utiliser le changement de variable $x = e^t$).

2. Trouver toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 29. Trouver la solution générale des équations différentielles

$$u^{(4)} + 2u'' + u = 0, \qquad u''' - u' = (3 - t)e^{2t}.$$

Inégalité de Gronwall et ses variantes

Exercice 30. Soient $f, g \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues telles que

$$f(t) \leq \int_0^t f(s)g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Que peut-on dire sur f ?

Exercice 31. Soit $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue. On suppose qu'il existe $c \geq 0$ tel que pour tout $x \geq 0$ on a

$$tf(t) \leq c + \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Montrer que f est bornée. (Indication : considérer la fonction $F(t) = c + \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$ et démontrer que $t \mapsto F(t)/t$ est décroissante).

Montrer que toute solution $y \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe C^2 de l'équation différentielle suivante est bornée :

$$y'' + ty = 0.$$

(Indication : multiplier par $2y'$, intégrer sur $[0, t]$ et appliquer le résultat de la question précédente à y^2).

3 Section vide

4 Intégrales multiples

Exercice 32. Calculer $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dans les cas suivants :

1)	$f(x,y) = \ln(x+y+1)$	D est le triangle de sommets O, $A(1,0)$, $B(0,1)$.
2)	$f(x,y) = (2x-y)^2$	D est le parallélogramme limité par les droites d'équations. $y = x$, $y = 2x$, $y = x+1$, $y = 2x-2$.
3)	$f(x,y) = e^{x+y}$	D est l'ensemble des points tels que $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \leq 1$.
4)	$f(x,y) = (x+2y)^2$	D est le triangle de sommets O, $A(1,1)$, $B(2,1)$.

Exercice 33. Calculer $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en utilisant les coordonnées polaires :

1)	$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$	D est la couronne limitée par le cercle de centre O et rayons $0 < a < b$.
2)	$f(x,y) = (x+y)^2$	D est le disque de centre O et de tayon $a > 0$.
3)	$f(x,y) = x^2+y^2$	D est limité par le cercle de centre O et rayon 3 et le cercle de centre $(1,0)$ de rayon 1.

Exercice 34. Calculer les intégrales doubles $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ suivantes à l'aide du changement de variables indiqué :

1)	$f(x,y) = 1$	D est limité par les courbes d'équations $y = ax$, $y = x/a$, $y = b/x$, $y = 1/(bx)$, avec $a, b > 1$ et $x > 0$. Poser $x = u/v$ et $y = uv$.
2)	$f(x,y) = x^2+y^2$	D est limité par l'ellipse d'équation $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Poser $x = au\cos v$, $y = bu\sin v$.

Exercice 35. On considère une balle de rayon R et densité volumique δ_0 (constante).

1. Calculer le moment d'inertie par rapport à son centre de gravité
2. Calculer le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité.

Exercice 36. Soit E un solide homogène de rotation, obtenu en faisant tourner autour de l'axe z l'ensemble $F = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \colon a < z < b,\ 0 < x < f(z)\}$. Démontrer que le moment d'inertie de E par rapport à l'axe z est donné par

$$\frac{\pi}{2}\int_a^b f(z)^4\,\mathrm{d}z.$$

Exercice 37. Un matériau est distribué dans le cube $D = [0,R]^3$ selon la densité volumique $f(x,y,z) = \frac{x+y}{(z+1)^2}$. Calculer la masse totale.

Exercice 38. Dessiner et ensuite trouver le volume et le centre de gravité du solide

$$D = \{(x,y,z) \colon |x| + |y| + |z| \leq 2,\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}.$$

Exercice 39. Trouver le centre de masse du demi-cylindre homogène

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq H,\ y \geq 0\}.$$

Exercice 40. Calculer le centre de masse du solide Ω composé de la demi-boule B_R^- et du cylindre C_R suivant :

$$B_R^- = \{(x,y,z) \colon x^2+y^2+x^2 \leq R^2,\ z \leq 0\},$$

et

$$C_R = \{(x,y,z) \colon x^2+y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq R\},$$

en supposant que la densité de masse est $\mu(x,y,z) = z^2$.

Exercice 41. On note C_R et D_R respectivement le carré $[-R,R]^2$ et le disque centré en 0 et de rayon R. Démontrer que

$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{C_R}\exp(-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{R\to+\infty}\iint_{D_R}\exp(-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

On notera $\iint_{\mathbb{R}^2}\exp(-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ cette limite.

Calculer $\iint_{\mathbb{R}^2}\exp(-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en utilisant les coordonnées polaires.

Déduire de la première question et du théorème du Fubini que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$$

5 Courbes paramétrées et surfaces

Exercice 42. Paramétrer la courbe définie par l'équation $x^2+y^2-4x-2y+1=0$.

Exercice 43. Trouver les équations de la droite tangente et du plan normal à la courbe $x=t-2, y=3t^2+1, z=2t^3$, au point où celle-ci coupe le plan yOz.

Exercice 44. Soit $f(x,y)=x^2+4y^2$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Donner une paramétrisation de la ligne de niveau de f passant par (a,b). Calculer l'amplitude de l'angle formé par cette ligne et le vecteur $\nabla f(a,b)$.

Exercice 45. Calculer la longueur de l'arc de parabole défini par $y=ax^2$ pour $0\le x\le 1$, avec $a>0$. (*Indication :* les intégrales de la forme $\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ se calculent via le changement de variable $x=\sinh u$ et la relation $\cosh^2-\sinh^2=1$).

Exercice 46. La *spirale logarithmique* est définie par $\gamma(t)=(e^{at}\cos t, e^{at}\sin t)$, $a>0$

1. Dessiner la spirale logarithmique.
2. Montrer que la spirale logarithmique fait un angle constant avec la droite joignant un point courant à l'origine.
3. Calculer la longueur de l'arc entre $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$.
4. Montrer que $\gamma(t)\mapsto(0,0)$ quand $t\mapsto-\infty$.
5. Montrer que la longueur de l'arc entre 0 et t a une limite finie quand $t\mapsto-\infty$.

Exercice 47.

1. Déterminer la longueur de l'arc de courbe (appellée *cycloïde*) défini par

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t), \qquad t\in[0,2\pi] \end{cases}$$

2. On considère l'hélice circulaire à pas constant définie par

$$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \\ z=ht \end{cases}$$

   - Montrer que la tangente forme avec l'axe Oz un angle constant.
   - Calculer la longueur d'un spire d'hélice ($t\in[0,2\pi]$).

Exercice 48.

1. Soit Γ la courbe paramétrée en coordonnées polaires par $\rho=\rho(t)$ et $\theta=\theta(t)$, où $t\in[a,b]$. Montrer que la longueur de Γ est

$$\int_a^b\sqrt{\rho'^2+\rho^2\theta'^2}\,dt.$$

En déduire une formule pour la longueur d'une courbe définie en *forme polaire* (c'est à dire, une courbe paramétrée par $\rho=\rho(\theta)$).

2. Tracer et calculer la longueur des courbes définies par

$$\rho = \theta, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$
$$\rho = 2(1+\cos\theta), \qquad -\pi \leq \theta \leq \pi \qquad \textit{(cardioïde)}.$$

Ces paramétrisations sont-elles régulières ? La droite tangente à ces courbes en $(0,0)$ existe-t-elle ?

Exercice 49. Déterminer le rayon de courbure minimum de la courbe donnée par le graphe de la fonction $y = \ln x$, $x > 0$.

Exercice 50. Soit $a > 0$. Tracer la courbe paramétrée (astroïde) par

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Mettre en évidence les symétries remarquables de la courbe et montrer que l'on peut se limiter à l'étudier sur l'intervalle $t \in [0, \pi/2]$.
- Construire les droites tangentes aux points singuliers.

Exercice 51. Étudier et construire la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}, t \in [0,1].$$

Même question en supposant maintenant $t \in \mathbb{R}$: se ramener au cas $t \in [0,1]$ en calculant $(x(-t), y(-t))$ et $(x(\frac{1}{t}), y(\frac{1}{t}))$. Quelles symétries de la courbe peut-on en déduire ?

Exercice 52. Former une équation cartésienne du plan tangent en un point régulier quelconque de la surface paramétrée par

$$\begin{cases} x = \sinh u \\ y = \sinh v \\ z = u + v. \end{cases}$$

Exercice 53. Former une équation cartésienne du support de la nappe paramétrée par

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = uv \\ z = u^2 + v^2. \end{cases}$$

Exercice 54. Paramétrer la surface latérale d'un cône de hauteur h et base circulaire de rayon a. En utilisant les coordonnées cylindriques et la théorie des nappes paramétrées, calculer l'aire de cette surface.

Exercice 55. 1. Calculer l'intégrale sur la surface

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; z = x^3, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \pi\}$$

de la fonction définie par $f(x,y) = 3x^3 \sin y$.

2. Calculer l'intégrale sur la surface

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 3\}$$

de la fonction définie par $f(x,y) = x + 1$.

6 Fonctions implicites et optimisation sous contrainte

Exercice 56. Montrer que l'égalité $2e^{x+y} + y - x = 0$ définit $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(1, -1)$. Calculer $\varphi'(1)$ et $\varphi''(1)$.

Exercice 57. Donner l'allure de $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0\}$ au voisinage des points $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Exercice 58. Montrer que l'équation : $x^3 + y^3 - 3xy = 1$ définit au voisinage de $x = 0$ une fonction implicite : $y = \varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 1$. Donner le DL de φ en 0 à l'ordre 3.

Exercice 59. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$. Montrez qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

Exercice 60. On considère le système d'équations:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

Montrer que, pour x proche de l'origine, il existe des fonctions positives $y(x)$ et $z(x)$ telles que $(x, y(x), z(x))$ soit solution du système. On déterminera y' en fonctionde x, y et z' en fonction de x, z.

Utilisation des multiplicateurs de Lagrange

Exercice 61. Démontrer que la fonction $f(x, y, z) = 4y - x - z$ possède un minimum absolu sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Ensuite le calculer, en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Exercice 62. Trouver le point sur le plan d'équation $2x + y + z = 6$ et dans $\mathbb{R}^3_+$ qui maximise le produit xyz de ses coordonnées.

Exercice 63. On s'intéresse à la surface de niveau de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation

$$g(x, y, z) = x^2(y - 3)^2 + y^2 + y + z^2 - 1 = 0.$$

1. Démontrer que S est bornée
   Indication : Démontrer que si $(x, y, z) \in S$ alors $|y| \leq (1 + \sqrt{5})/2$, ensuite que $z^2 \leq 3$ et $x^2 \leq 3$.
2. En déduire que la fonction $f(x, y, z) = y + 2z$ atteint un minimum et un maximum sur S.
3. Démontrer que le gradient de g ne s'annule en aucun point de S.
4. Déterminer les points où f atteint ses bornes sur S. Pour chacun des deux points trouvés, préciser si le point correspond au maximum ou au minimum de f.

Exercice 64. On considère la fonction $f(x_1, \ldots x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$, définie sur $\mathbb{R}^n_+$. Maximiser f sous la contrainte $x_1 + \cdots + x_n = n$. En déduire l'inégalité entre les moyennes géométrique et arithmétique : $\sqrt{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$.

Exercice 65. On s'intéresse au minimum et au maximum de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous les contraintes $x + y - z = 0$ et $\frac{1}{16}x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

1. Donner une interprétation géométrique du problème et prouver l'existence des extrema.
2. Appliquer la règle des multiplicateurs de Lagrange et résoudre le système de 5 équations et 5 inconnues donnant les points stationnaires de la Lagrangienne. [Réponse : $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$ et $\pm\frac{1}{3}(4, -2, 2)$].
3. Conclure.

Exercice 66. Trouver de deux manières différentes le minimum et le maximum de la fonction $f(x, y, z) = x + 3y - z$ sur l'ensemble défini par les équations $x^2 + y^2 - z = 0$ et $z = 2x + 4y$: (i) par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. (ii) En cherchant une paramétrisation de la contrainte.

Exercice 67. Parmi toutes les boîtes sans couvercle à forme de parallélépipède et de surface égale à 12, trouver celle de volume maximal.
(*Indication :* La difficulté principale ici est de démontrer que le problème possède une solution. Commencer par démontrer que si l'une des longuers x, y ou z de la boîte tend vers l'infini, alors le volume V tend vers 0. Cela permet de restreindre le problème à un compact $0 \leq x, y, z \leq R$. Cela garantit l'existence d'un maximum. Pour le déterminer, appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange).

Exercice 68. Optimiser la fonction $f(x, y) = xy$ sur $\mathbb{R}^2$ et sous la contrainte $g(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$.

Exercice 69. Optimiser $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 2\}$.

7 Exercices de révision

Exercice 70. On note $C_c(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *à support compact* (c'est-à-dire, les fonctions qui sont identiquement nulles en dehors d'un intervalle fermé et borné). Démontrer que $C_c(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel et que $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ définit bien une norme sur $C_c(\mathbb{R})$.

Soit $(f_n) \subset C_c(\mathbb{R})$ une suite de fonctions telles que $f_n(x) = e^{-x^2}$ sur $[-n, n]$ et $0 \le f_n(x) \le e^{-n^2}$ sur $]-\infty, -n] \cup [n, +\infty[$. Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n). L'espace $C_c(\mathbb{R})$ est-il de Banach ?

Exercice 71. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{P}$$

1. Écrire une équation intégrale équivalente à (P), de la forme $y = F(y)$.
2. En appliquant le théorème de point fixe à F, préciser un intervalle de la forme $[-c, c]$ ($c > 0$) où le problème (P) possède une unique solution.
3. Soit (y_n) la suite de fonctions définie par récurrence $y_0(x) = 0$, $y_{n+1}(x) = F(y_n)(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire de $\lim_{n\to+\infty} y_n(x)$? Expliciter les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ et donner une expression intégrale pour $y_3(x)$.

Exercice 72. Pour chacune des expressions suivantes, reconnaitre la solution générale d'une équation différentielle linéaire que l'on déterminera.

1. $\lambda e^{2x} + \sin x, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$
2. $\lambda e^{3x} + \mu e^{-2x} + \cos x, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3. $\lambda e^{-x} + \mu e^{-2x} + \nu x e^{-2x}$,
4. $e^{-x}((\lambda + \mu x)\cos 2x + (\nu + \eta x)\sin 2x) \qquad \lambda, \mu, \nu, \eta \in \mathbb{R}$

Exercice 73. La température annuelle moyenne à l'équateur est de $25°C$ et au pôle nord de $-34°C$. Si on fait l'hypothèse (simpliste) que la temperature moyenne annuelle est, dans chaque hémisphère, une fonction affine de la latitude, quelle serait la température annuelle moyenne dans tout l'hemisphère nord ? (*Remarque :* La valeur moyenne d'une fonction $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ définie sur une surface Σ est donnée par $\frac{1}{\mathrm{Aire}(\Sigma)} \int_\Sigma f \,\mathrm{d}\sigma$).

Exercice 74. Étant donnée la courbe Γ paramétrée par $x(t) = t^3 + t + 1$, $y(t) = t^3 - t^2$ et $z(t) = t^2 - 1$, trouver, s'ils existent, les points où :

1. La tangente à Γ est parallèle à la droite d'équations $x - y = 3y - 2z + 2 = 0$.
2. La tangente à Γ est parallèle au plan d'équation $x - y + z = 0$.

Exercice 75. Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$ une fonction de classe C^1. On considère la courbe $\Gamma = \{(x, f(x)\colon x \in [a, b]\}$, donnée par le graphe de la fonction f.

Paramétrer la surface de rotation de $\mathbb{R}^3$, obtenue en faisant tourner Γ autour de l'axe Ox d'un angle de 2π. Démontrer que l'aire A de la surface ainsi obtenue est $A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$. On note L la longueur de la courbe Γ et y_G l'ordonnée du centre de gravité de Γ.

Démontrer la formule

$$A = 2\pi y_G\, L$$

Cette formule affirme que *la mesure de l'aire engendrée par la rotation d'un arc de courbe plane autour d'un axe de son plan, et ne traversant pas l'arc de courbe, est égale au produit de la longueur de l'arc de courbe par la longueur de la circonférence décrite par son centre de gravité.* (Théorème de Guldin).

Exercice 76. Soit $C \subset \mathbb{R}^3$ la courbe obtenue comme intersection des deux surfaces d'équations

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4, \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1.$$

De quelle courbe s'agit-il ? Écrire les équations cartesiennes et paramétriques de la droite tangente en un point quelconque $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de la courbe C.

Trouver le point P_0 de C de hauteur minimale. (On pourra appliquer le théorème des multiplicateurs de Lagrange, ou bien élimininer les contraintes en exprimant, par exemple, x et z en fonction de y).