1 Formule de Taylor

Exercice 1. Trouver le développement limité d'ordre deux et autour de 0 de la fonction $x \mapsto e^x$. De même pour la fonction $u \mapsto \sin u$. Ensuite utiliser ces deux réponses afin de trouver le développement limité d'ordre deux à l'origine de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^x \sin(x+y)$. Comparer la réponse à celle obtenue par l'écriture directe de la formule de Taylor d'ordre 2 pour f.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction s'annulant en $(0,0,0)$ et dont on connait le développement limité d'ordre 2 centré en ce point. Quel est le développement limité centré à l'origine de la fonction $(x,y,z) \mapsto e^{xy} f(x,y,z)$?

2 Extrema libres de fonctions de plusieurs variables

Exercice 3. Soit $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ et $g(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3xy$. Montrer que l'origine est un point critique(=stationnaire) pour f et g. Étudier le signe de $f - f(0,0)$ et $g - g(0,0)$ et en déduire la nature.

Exercice 4. Soit $f(x,y) = rx^2 + 2s\,xy + t\,y^2$, $s,t \in \mathbb{R}$. Montrer que si $rt - s^2 > 0$ alors l'origine est un extremum global strict. Préciser s'il s'agit d'un point de minimum ou de maximum (distinguer les cas $r > 0$ et $r < 0$). Que peut-on dire de l'origine si $rt - s^2 < 0$?

Exercice 5.

1. Déterminer les points critiques de la fonction $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$. Pour chaque point critique, écrire la formule de Taylor d'ordre 2 pour f, centrée à ce point. Etudier les extrema relatifs (ou locaux) de $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$. Établir si f admet des extrema absolus (ou globaux).
2. Mêmes questions pour

$$\begin{array}{ll} (a) & f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3 \\ (b) & f(x,y) = (3x+4y)e^{-(x^2+y^2)} \\ (c) & f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^3 \\ (d) & f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy \end{array}$$

Exercice 6. On considère la fonction

$$f(x,y) = 1 + (x + \sqrt{2}y)^2 + ax^4 \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Déterminer les valeurs du paramètre a telles que l'origine soit (i) un point de col (ii) un point de minimum local (iii) un point de minimum local strict.

Exercice 7. On considère la fonction

$$f(x,y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

1. Etudier les extrema relatifs (locaux) de f sur $\mathbb{R}^2$. *Suggestion:* on pourra utiliser les symétries de la fonction $f(x,y)$ pour réduire le nombre de cas à étudier.
2. Démontrer que $f(x,y) \to 0$ quand $(x,y) \to \infty$.
3. Déduire de ce qui précède l'existence des extrema globaux de f sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer les extrema globaux.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. f possède-t-elle des extrema absolus sur $\mathbb{R}^2$?
3. Représenter $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$
   Justifier l'existence d'un maximum absolu et d'un minimum absolu pour f dans T. Les déterminer.

Exercice 9. On considère l'application $F(x,y) = \sqrt{y-x^2} + \sqrt{1-x^2-y}$.

1. Trouver l'ensemble $\mathcal{D}$ de tous les points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ où $F(x,y)$ est bien définie. Représenter graphiquement cet ensemble.
2. On note par $\partial\mathcal{D}$ la frontière $\mathcal{D}$. Étudier la restriction de f à $\partial\mathcal{D}$. Calculer
$$\min_{(x,y)\in\partial\mathcal{D}} F(x,y) \qquad \text{et} \qquad \max_{(x,y)\in\partial\mathcal{D}} F(x,y).$$
3. Trouver les points critiques de F à l'intérieur de $\mathcal{D}$.
4. Donner la nature de ces points (il n'est pas indispensable de calculer les dérivées secondes de F). En déduire la valeur de
$$\min_{(x,y)\in\mathcal{D}} F(x,y) \qquad \text{et} \qquad \max_{(x,y)\in\mathcal{D}} F(x,y).$$

Exercice 10. Soient $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant les développements limités centrés à l'origine $f(x,y) = 1 + 2x^2 + 3y^4 + o(\|(x,y)\|^4)$ et $g(x,y,z) = 1 + 2x^2 + 3y^4 + o(\|(x,y,z)\|^4)$. L'origine est-il un point stationnaire pour f ? Et pour g ? Peut-on en préciser la nature ?

Exercice 11. Mettre sous "forme canonique" les formes quadratiques de trois variables suivantes, c'est à dire, écrire $Q(x,y,z)$ comme la somme de trois termes de la forme $(ax+by+cz)^2$. Établir ensuite si elles sont sont de signe défini (c'est à dire si $Q \geq 0$ ou $Q \leq 0$ dans $\mathbb{R}^2$).

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= x^2 + y^2 + xy + 2z^2 \\ Q(x,y,z) &= x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5yz + 6xz \end{aligned}$$

Exercice 12. Écrire les formules de Taylor d'ordre 2 pour $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2+\frac{4}{3}z^3+xy-2x-y+1$, centrées aux points critiques de f. Déterminer ensuite la nature de ces points.

Exercice 13. Étudier la nature des points critiques des fonctions définies par

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{1}{2}x^2 + xyz + y - z \\ f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + 2x - 2y - 4z + 5 \\ f(x,y,z) &= 2x^2y - y^2 - x^4 - z^2. \end{aligned}$$

Préciser si les extrema trouvés sont stricts.

3 Intégrales multiples

Exercice 14. Calculer $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dans les cas suivants :

1)	$f(x,y) = \ln(x+y+1)$	D est le triangle de sommets O, $A(1,0)$, $B(0,1)$.
2)	$f(x,y) = (2x-y)^2$	D est le parallélogramme limité par les droites d'équations. $y=x$, $y=2x$, $y=x+1$, $y=2x-2$.
3)	$f(x,y) = e^{x+y}$	D est l'ensemble des points tels que $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \leq 1$.
4)	$f(x,y) = (x+2y)^2$	D est le triangle de sommets O, $A(1,1)$, $B(2,1)$.

Exercice 15. Calculer $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en utilisant les coordonnées polaires :

1)	$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$	D est la couronne limitée par le cercle de centre O et rayons $0 < a < b$.
2)	$f(x,y) = (x+y)^2$	D est le disque de centre O et de rayon $a > 0$.

Exercice 16. Calculer les intégrales doubles $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ suivantes à l'aide du changement de variables indiqué :

1)	$f(x,y)=1$	D est limité par les courbes d'équations $y=ax$, $y=x/a$, $y=b/x$, $y=1/(bx)$, avec $a,b>1$ et $x>0$. Poser $x=u/v$ et $y=uv$.
2)	$f(x,y)=x^2+y^2$	D est limité par l'ellipse d'équation $(x/a)^2+(y/b)^2=1$. Poser $x=au\cos v$, $y=bu\sin v$.

Exercice 17. On considère une balle de rayon R et densité volumique δ_0 (constante).

1. Calculer le moment d'inertie par rapport à son centre de gravité
2. Calculer le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité.

Exercice 18. Soit E un solide homogène de rotation, obtenu en faisant tourner autour de l'axe z l'ensemble $F=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2\colon a<z<b,\ 0<x<f(z)\}$. Démontrer que le moment d'inertie de E par rapport à l'axe z est donné par

$$\frac{\pi}{2}\int_a^b f(z)^4\,\mathrm{d}z.$$

Exercice 19. Un matériau est distribué dans le cube $D=[0,R]^3$ selon la densité volumique $f(x,y,z)=\frac{x+y}{(z+1)^2}$. Calculer la masse totale.

Exercice 20. Dessiner et ensuite trouver le volume et le centre de gravité du solide

$$D=\{(x,y,z)\colon |x|+|y|+|z|\le 2,\ |x|\le 1,\ |y|\le 1\}.$$

Exercice 21. Trouver le centre de masse du demi-cylindre homogène

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2\le R^2,\ 0\le z\le H,\ y\ge 0\}.$$

Exercice 22. Calculer le centre de masse du solide Ω composé de la demi-boule B_R^- et du cylindre C_R suivant :

$$B_R^-=\{(x,y,z)\colon x^2+y^2+x^2\le R^2,\ z\le 0\},$$

et

$$C_R=\{(x,y,z)\colon x^2+y^2\le R^2,\ 0\le z\le R\},$$

en supposant que la densité de masse est $\mu(x,y,z)=z^2$.

Exercice 23. On note C_R et D_R respectivement le carré $[-R,R]^2$ et le disque centré en 0 et de rayon R. Démontrer que

$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{C_R}\exp(-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{R\to+\infty}\iint_{D_R}\exp(-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

On notera $\iint_{\mathbb{R}^2}\exp(-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ cette limite.

Calculer $\iint_{\mathbb{R}^2}\exp(-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en utilisant les coordonnées polaires.

Déduire de la première question et du théorème du Fubini que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$$

4 Courbes paramétrées et surfaces

Exercice 24. Paramétrer la courbe définie par l'équation $x^2+y^2-4x-2y+1=0$.

Exercice 25. Trouver les équations de la droite tangente et du plan normal à la courbe $x=t-2, y=3t^2+1, z=2t^3$, au point où celle-ci coupe le plan yOz.

Exercice 26. Soit $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Donner une paramétrisation de la ligne de niveau de f passant par (a,b). Calculer l'amplitude de l'angle formé par cette ligne et le vecteur $\nabla f(a,b)$.

Exercice 27. Calculer la longueur de l'arc de parabole défini par $y = ax^2$ pour $0 \leq x \leq 1$, avec $a > 0$. (*Indication :* les intégrales de la forme $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$ se calculent via le changement de variable $x = \sinh u$ et la relation $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$).

Exercice 28. La *spirale logarithmique* est définie par $\gamma(t) = (e^{at}\cos t, e^{at}\sin t)$, $a > 0$

1. Dessiner la spirale logarithmique.
2. Montrer que la spirale logarithmique fait un angle constant avec la droite joignant un point courant à l'origine.
3. Calculer la longueur de l'arc entre $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$.
4. Montrer que $\gamma(t) \mapsto (0,0)$ quand $t \mapsto -\infty$.
5. Montrer que la longueur de l'arc entre 0 et t a une limite finie quand $t \mapsto -\infty$.

Exercice 29.

1. Déterminer la longueur de l'arc de courbe (appellée *cycloïde*) défini par

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \qquad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

2. On considère l'hélice circulaire à pas constant définie par

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ht \end{cases}$$

- Montrer que la tangente forme avec l'axe Oz un angle constant.
- Calculer la longueur d'un spire d'hélice ($t \in [0, 2\pi]$).

Exercice 30.

1. Soit Γ la courbe paramétrée en coordonnées polaires par $\rho = \rho(t)$ et $\theta = \theta(t)$, où $t \in [a,b]$. Montrer que la longueur de Γ est

$$\int_a^b \sqrt{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2}\, dt.$$

En déduire une formule pour la longueur d'une courbe définie en *forme polaire* (c'est à dire, une courbe paramétrée par $\rho = \rho(\theta)$).

2. Tracer et calculer la longueur des courbes définies par

$$\begin{aligned} &\rho = \theta, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \\ &\rho = 2(1 + \cos\theta), \qquad -\pi \leq \theta \leq \pi \qquad \textit{(cardioïde).} \end{aligned}$$

Ces paramétrisations sont-elles régulières ? La droite tangente à ces courbes en $(0,0)$ existe-t-elle ?

Exercice 31. Déterminer le rayon de courbure minimum de la courbe donnée par le graphe de la fonction $y = \ln x$, $x > 0$.

Exercice 32. Soit $a > 0$. Tracer la courbe paramétrée (astroïde) par

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Mettre en évidence les symétries remarquables de la courbe et montrer que l'on peut se limiter à l'étudier sur l'intervalle $t \in [0, \pi/2]$.

- Construire les droites tangentes aux points singuliers.

Exercice 33. Étudier et construire la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}, t \in [0,1].$$

Même question en supposant maintenant $t \in \mathbb{R}$: se ramener au cas $t \in [0,1]$ en calculant $(x(-t), y(-t))$ et $(x(\frac{1}{t}), y(\frac{1}{t}))$. Quelles symétries de la courbe peut-on en déduire ?

Exercice 34. Former une équation cartésienne du plan tangent en un point régulier quelconque de la surface paramétrée par

$$\begin{cases} x = \sinh u \\ y = \sinh v \\ z = u + v. \end{cases}$$

Exercice 35. Former une équation cartésienne du support de la nappe paramétrée par

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = uv \\ z = u^2 + v^2. \end{cases}$$

Exercice 36. Paramétrer la surface latérale d'un cône de hauteur h et base circulaire de rayon a. En utilisant les coordonnées cylindriques et la théorie des nappes paramétrées, calculer l'aire de cette surface.

Exercice 37.

1. Calculer l'intégrale sur la surface

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = x^3, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \pi\}$$

de la fonction définie par $f(x, y) = 3x^3 \sin y$.

2. Calculer l'intégrale sur la surface

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \le z \le 3\}$$

de la fonction définie par $f(x, y) = x + 1$.

5 Fonctions implicites et optimisation sous contrainte

Exercice 38. Montrer que l'égalité $2e^{x+y} + y - x = 0$ définit $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(1, -1)$. Calculer $\varphi'(1)$ et $\varphi''(1)$.

Exercice 39. Donner l'allure de $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0\}$ au voisinage des points $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Exercice 40. Montrer que l'équation : $x^3 + y^3 - 3xy = 1$ définit au voisinage de $x = 0$ une fonction implicite : $y = \varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 1$. Donner le DL de φ en 0 à l'ordre 3.

Exercice 41. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$. Montrez qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

Exercice 42. On considère le système d'équations:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

Montrer que, pour x proche de l'origine, il existe des fonctions positives $y(x)$ et $z(x)$ telles que $(x, y(x), z(x))$ soit solution du système. On déterminera y' en fonctionde x, y et z' en fonction de x, z.

Utilisation des multiplicateurs de Lagrange

Exercice 43. Démontrer que la fonction $f(x,y,z) = 4y - x - z$ possède un minimum absolu sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Ensuite le calculer, en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Exercice 44. Trouver le point sur le plan d'équation $2x + y + z = 6$ et dans $\mathbb{R}^3_+$ qui maximise le produit xyz de ses coordonnées.

Exercice 45. On s'intéresse à la surface de niveau de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation

$$g(x,y,z) = x^2(y-3)^2 + y^2 + y + z^2 - 1 = 0.$$

1. Démontrer que S est bornée
   Indication : Démontrer que si $(x,y,z) \in S$ alors $|y| \leq (1+\sqrt{5})/2$, ensuite que $z^2 \leq 3$ et $x^2 \leq 3$.
2. En déduire que la fonction $f(x,y,z) = y + 2z$ atteint un minimum et un maximum sur S.
3. Démontrer que le gradient de g ne s'annule en aucun point de S.
4. Déterminer les points où f atteint ses bornes sur S. Pour chacun des deux points trouvés, préciser si le point correspond au maximum ou au minimum de f.

Exercice 46. On considère la fonction $f(x_1, \dots x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$, définie sur $\mathbb{R}^n_+$. Maximiser f sous la contrainte $x_1 + \cdots + x_n = n$. En déduire l'inégalité entre les moyennes géométrique et arithmétique : $\sqrt{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$.

Exercice 47. On s'intéresse au minimum et au maximum de la fonction $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous les contraintes $x + y - z = 0$ et $\frac{1}{16}x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

1. Donner une interprétation géométrique du problème et prouver l'existence des extrema.
2. Appliquer la règle des multiplicateurs de Lagrange et résoudre le système de 5 équations et 5 inconnues donnant les points stationnaires de la Lagrangienne. [Réponse : $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$ et $\pm\frac{1}{3}(4,-2,2)$].
3. Conclure.

Exercice 48. Trouver de deux manières différentes le minimum et le maximum de la fonction $f(x,y,z) = x + 3y - z$ sur l'ensemble défini par les équations $x^2 + y^2 - z = 0$ et $z = 2x + 4y$: (i) par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. (ii) En cherchant une paramétrisation de la contrainte.

Exercice 49. Parmi toutes les boîtes sans couvercle à forme de parallélépipède et de surface égale à 12, trouver celle de volume maximal.
(*Indication :* La difficulté principale ici est de démontrer que le problème possède une solution. Commencer par démontrer que si l'une des longuers x, y ou z de la boîte tend vers l'infini, alors le volume V tend vers 0. Cela permet de restreindre le problème à un compact $0 \leq x, y, z \leq R$. Cela garantit l'existence d'un maximum. Pour le déterminer, appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange).

Exercice 50. Optimiser la fonction $f(x,y) = xy$ sur $\mathbb{R}^2$ et sous la contrainte $g(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$.

Exercice 51. Optimiser $f(x,y) = xy$ sous la contrainte $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon g(x,y) = x^2 + y^2 \leq 2\}$.

6 Espaces métriques complets

6.1 Suites de Cauchy et espaces complets

Exercice 52. Vérifier de plusieurs manières si la suite réelle $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ est de Cauchy.

Exercice 53. Les suites de Cauchy sont-elles bornées ? Réciproquement, les suites bornées sont-elles de Cauchy ? Justifier.

Exercice 54. Etablir si les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}$ sont complets : $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $]0,1]$, $[0,+\infty[$, $\mathbb{Z}$.

Exercice 55. Soit (x_n) une suite de Cauchy, telle qu'il existe une suite extraite (x_{n_k}) convergente vers $x \in X$. Démontrer qu'alors $x_n \to x$.

Exercice 56.
(i) Construire une suite de fonctions dérivables sur $[-1,1]$ qui converge uniformément vers la fonction $x \mapsto |x|$.
(ii) Soit $X = C^1([-1,1],\mathbb{R})$, l'ensemble de fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[-1,1]$. On munit X de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. X est-il un espace de Banach ?

Exercice 57. Soit $c_0 = \{(x_n) \subset \mathbb{R}\colon \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$. On munit c_0 de la norme $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Montrer que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

6.2 Contractions et points fixes

Exercice 58. Établir si $f(x) = \ln(1+x^2)$ est contractante en tant qu'application :
(i) $f\colon [2,+\infty[\to \mathbb{R}$, (ii) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, (iii) $f\colon]1,+\infty[\to\mathbb{R}$.

Exercice 59. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$. Donner une condition suffisante sur la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour que l'application $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ soit contractante. Même question lorsque l'on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$.

Exercice 60. Soient (X,d) un espace métrique complet, $f\colon X\to X$ et $k\in\mathbb{N}$. On suppose que $f\circ f$ est contractante. Montrer que f a exactement un point fixe.

Exercice 61. Démontrer le résultat de point fixe suivant : *Toute fonction continue* $f\colon [0,1]\to[0,1]$ *possède au moins un point fixe*. (On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $x\mapsto f(x)-x$).

Exercice 62.
1. Démontrer qu'une fonction $x = x(t)$ est solution du problème $(*)$ si et seulement si $x = x(t)$ est solution du problème $(**)$:

$$(*)\begin{cases} x\in C^1([-1,1],\mathbb{R}) \\ x'(t) = \dfrac{1}{2}\sin(x(t)) \quad \forall t\in[-1,1] \\ x(0) = 1. \end{cases} \qquad (**)\begin{cases} x\in C([-1,1],\mathbb{R}) \\ x(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t \sin(x(s))\,ds \quad \forall t\in[-1,1] \end{cases}$$

2. Soit $E = C([-1,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Définir une contraction $\phi\colon E\to E$ telle que x_0 est un point fixe pour ϕ si et seulement si x_0 est solution de $(**)$. Conclure que le problème $(*)$ possède une et une seule solution.

Exercice 63. Pour $x_0\in\mathbb{R}$, on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n$, $n\geq 0$. On veut montrer le résultat suivant : *il existe un unique choix de* $x_0\in\mathbb{R}$ *tel que* $(x_n)\subset[10,11]$

1. Montrer que $Y = \{\,(y_n)\in\ell^\infty\colon (y_n)\subset[10,11]\,\}$, muni de la distance $d\big((y_n),(y'_n)\big) = \sup_n |y_n - y'_n|$ est complet.
2. Soit $F((y_n)) = (z_n)$, où $z_n = \sqrt{100 + y_{n+1} - \sin n}$. Montrer que $F\colon Y\to Y$ est bien définie et contractante.
3. Conclure.

Exercice 64. Soient $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x\leq 5\}$. Trouver un ensemble (aussi grand que possible) de paramètres (α,β) tels que le système

$$\begin{cases} x = 2 + \alpha(1 + e^{x-5} + \cos y) \\ y = 3 + \beta(e^{x-5} - \sin y) \end{cases}$$

ait exactement une solution dans A. (*Indication :* On pourra chercher une application contractante $\phi\colon (A,\|\cdot\|_1)\to(A,\|\cdot\|_1)$ où $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$).

7 Équations différentielles

Exercice 65. Résoudre[1] dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2$
2. $y' + y = 2\sin x$
3. $y' - y = (x+1)e^x$
4. $y' + y = x - e^x + \cos x$

Exercice 66. Déterminer toutes les fonctions dérivables $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Exercice 67.

1. Résoudre l'équation différentielle $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$. Tracer les courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 3$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' \sin x - y\cos x + 1 = 0$ sur $]0, \pi[$. Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Exercice 68 (Variation de la constante)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0; +\infty[$
2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$
3. $x(1 + \ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 69. On considère l'équation différentielle non-linéaire

$$y' - e^x e^y = a$$

Déterminer ses solutions, en précisant soigneusement leurs intervalles de définition, pour $a = 0$. Même question avec $a = -1$ (faire le changement de fonction inconnue $z(x) = x + y(x)$. Dans chacun des deux cas, construire la courbe intégrale qui passe par l'origine.

Exercice 70. Pour les équations différentielles suivantes, trouver les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier :

$$x^2y' - y = 0, \qquad\qquad xy' + y - 1 = 0$$

Exercice 71. Démontrer que le problème de Cauchy non-linéaire

$$\begin{cases} y' = |y| + |t| \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

possède une solution $y(t)$ définie sur $\mathbb{R}$. Construire cette solution. (Indication : on commencera par construire une solution $y \geq 0$ pour $t \geq 0$. Ensuite une solution $y \geq 0$ pour pour $-1 \leq t \leq 0$. Ensuite une solution $y \leq 0$ pour $t \leq -1$. Raccorder en $t = 0$ et $t = -1$ en imposant la condition de dérivabilité).

Exercice 72 (Équations de Bernoulli)**.** Montrer que l'équation de Bernoulli

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \qquad n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0, n \neq 1$$

se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = 1/y(x)^{n-1}$.

Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

[1] Cet exercice et les suivants de cette section sont issues d'une fiche de Léa Blanc-Centi

Exercice 73 (Équations de Riccati)**.** Montrer que si y_0 est une solution particulière de l'équation de Riccati

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $n = 2$).

Résoudre l'équation $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution.

Exercice 74. Trouver les solutions du système différentiel triangulaire $U'(t) = AU(t)$, où $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 75. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base de vecteurs propres de A et en déduire la solution générale du système différentiel $U'(t) = AU(t)$. Trouver l'unique solution vérifiant la condition $U(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 76. Résoudre

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' + 2y' + 2y = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 0$
4. $y'' + y = 2\cos^2 x$

Exercice 77. On considère $y'' - 4y' + 4y = d(x)$. Résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière lorsque $d(x) = e^{-2x}$, puis $d(x) = e^{2x}$. Donner la forme générale des solutions quand $d(x) = \frac{1}{2}\cosh(2x)$.

Exercice 78. Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable suggéré.

1. $x^2y'' + xy' + y = 0$, sur $]0; +\infty[$, en posant $x = e^t$;
2. $(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + my = 0$, sur $\mathbb{R}$, en posant $x = \tan t$ (en fonction de $m \in \mathbb{R}$).

Exercice 79. Considérer le système différentiel

$$\begin{cases} u' + u - v = e^t \\ v' - 4u + v = t + 3. \end{cases}$$

Démontrer que u vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et la résoudre. En déduire la solution générale du système.

Exercice 80.

1. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle $x^2y'' + y = 0$ (utiliser le changement de variable $x = e^t$).
2. Trouver toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 81. Trouver la solution générale des équations différentielles

$$u^{(4)} + 2u'' + u = 0, \qquad u''' - u' = (3 - t)e^{2t}.$$