1 Dérivées partielles et différentiabilité de fonctions de plusieurs variables

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x + e^y$ au point $(1,0)$. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de la fonction f au point $(1,0,2)$.

Exercice 2. Donner l'équation de l'hyperplan tangent dans $\mathbb{R}^4$ au graphe de la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x + z^2$, au point où $x = y = z = 1$.

Exercice 3. On considère la surface (l'ellipsoïde) d'équation $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$. Montrer que le point $(\frac{1}{3}, 2, 2)$ appartient à la surface et trouver l'equation du plan tangent à la surface en $(\frac{1}{3}, 2, 2)$.

Exercice 4. Pour les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes, calculer les dérivées directionnelles de f à l'origine, le long toute direction.

$$f(x,y) = x, \qquad f(x,y) = xy, \qquad f(x,y) = x^2 + 2x + y + 1, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 5. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \sin(x + y^2)$. Calculer les dérivées partielles de f à l'origine et au point $(2,1)$.

Calculer les dérivées directionnelles de f à l'origine et au point $(2,1)$, le long d'une direction arbitraire. Déterminer, à l'origine et au point $(2,1)$, les directions le long desquelles les dérivées directionnelles de f s'annullent.

Exercice 6. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction qu'à tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ associe la distance à l'origine de ce point. Donner l'expression de la fonction f. Calculer ensuite les dérivées partielles de f en tout point $(x,y) \neq (0,0)$. Calculer ensuite $\|\nabla f(x,y)\|$ en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.

Démontrer qu'à l'origine f n'admet pas de dérivée partielle.

Exercice 7. On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par

$$f(x,y) = \sin(2x - y)\ln(xy - 1) + xy^3 - 1.$$

1. Prouver que f est de classe C^1 dans un voisinage du point $(1,2) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $f(1,2)$, $\nabla f(x,y)$, et $\nabla f(1,2)$.
2. Quelle est la valeur de $f(1+h, 2+k)$ (approximativement) pour un petit déplacement (h,k) à partir du point $(1,2)$?
3. À partir du point $(1,2)$, on voudrait, par un petit déplacement parallèle à l'un des axes, augmenter la valeur de f ; quel est le meilleur choix de direction pour celui-ci ?
4. On pose une goutte d'eau sur la surface donnée par le graphe de f, au point $(1,2,f(1,2))$. Dans quelle direction la goutte commence-t-elle à glisser ?

Exercice 8. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x,y) = (x^2 + 2y^3)^{1/5}$. Calculer $f(4,2)$ et $\mathrm{d}f_{(4,2)}$ (la différentielle de f au point $(4,2)$).

Utiliser le résultat de la question précedente afin de calculer approximativement $[(3,8)^2 + 2(2,1)^3]^{1/5}$.

Exercice 9. On considère les fonctions $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ pour } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = \sin(|xy|)\ .$$

1. Discuter la continuité de ces fonctions en $(0,0)$ et calculer les dérivées partielles premières.
2. Vérifier si ces fonctions sont de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Ecrire sa matrice jacobienne.

Exercice 11. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f au point $(0,0)$.
2. Montrer que f admet en $(0,0)$ des dérivées dans toutes les directions.
3. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 12. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, la fonction définie par $f(x,y,z) = (x+3z, y)$ et $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, la fonction définie par $g(x,y) = (x^2, 1)$. Calculer les matrices jacobiennes de f et de $g \circ f$ en tout point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 13. On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto e^{3x+2y} \in \mathbb{R}$ et on pose $x = x(t) = \cos(t)$ et $y = y(t) = t^2$. Calculer de deux manières différentes la dérivée de la fonction

$$F : \mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) = g\big(x(t), y(t)\big),$$

une première fois directement, et une seconde fois comme une dérivée de fonction composée.

Exercice 14. Soient $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^2. On pose, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \phi\big(x, y, \psi(x,y)\big)$$

C^2. Trouver une formule qui exprime f_x en fonction des dérivées partielles de ϕ et de ψ. Même question pour f_{xx}.

Exercice 15. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ homogène de dégré a, c'est à dire vérifiant

$$\forall \lambda > 0,\ \forall (x,y) \neq (0,0)\ : f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^a f(x,y).$$

Dériver terme-à-terme l'expression précédent par rapport à λ. En déduire l'égalité

$$x f_x(x,y) + y f_y(x,y) = a f(x,y).$$

Exercice 16.

1. Pour $g(x,y,z) = xy^4z^3$, vérifier que $g_{xyz} = g_{xzy} = g_{zyx}$.
2. Montrer que les fonctions $f(x,y) = 5xy$, $f(x,y) = e^x \sin y$, $f(x,y) = \arctan(y/x)$ et $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ sont toutes solution de l'équation aux dérivés partielles (edp) de Laplace $f_{xx} + f_{yy} = 0$.
3. Soit $f = x_1^3 x_2^5 x_3^7 x_4^{13}$. Trouver $\dfrac{\partial^6 f}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_1^2 \partial x_4 \partial x_2}$.
4. On prend $f(x,y,z) = x^2\cos(y^3+z^2)$. Pourquoi sait-on que $f{zyxxyxyy} = 0$, sans rien calculer ? Sait-on aussi que $f{xyyzzzy} = 0$? (Expliquer).

Exercice 17. Une fonction $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *radiale* si elle elle de la forme $F(x) = g(\|x\|)$, où $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

1. Que peut-on dire des surfaces de niveau des fonctions radiales ?
2. On suppose que la fonction g est deux fois dérivable dans $[0,\infty)$. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$ pour $x \neq 0$.

3. On note ΔF le *Laplacien* de F, défini par $\Delta F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x)$. Calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire que le Laplacien d'une application radiale est une fonction radiale ΔF est une fonction radiale.

Exercice 18. Déterminer si les champs de vecteurs suivants $\vec{V} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont des champs de gradients, et si oui, déterminer leurs potentiels scalaires. Autrement dit : *établir s'il existe $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\nabla f = \vec{V}$ dans $\mathbb{R}^2$, et si oui, construire une telle f.*
(*Indication :* trouver une condition nécessaire pour qu'une telle application f existe, en appliquant le théorème de Schwarz).

1. $\vec{V}(x, y) = (y, x)$,
2. $\vec{V}(x, y) = (3x^2y + 2x + y^3, x^3 + 3xy^2 - 2y)$,
3. $\vec{V}(x, y) = (\exp(xy), \sin(x + y))$,

Même question pour le champ de vecteur de $\mathbb{R}^3$, $\vec{V}(x, y, z) = (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy)$.

2 Formule de Taylor

Exercice 19. Trouver le développement limité d'ordre deux et autour de 0 de la fonction $x \mapsto e^x$. De même pour la fonction $u \mapsto \sin u$. Ensuite utiliser ces deux réponses afin de trouver le développement limité d'ordre deux à l'origine de la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^x \sin(x + y)$. Comparer la réponse à celle obtenue par l'écriture directe de la formule de Taylor d'ordre 2 pour f.

Exercice 20. Soit $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction s'annulant en $(0, 0, 0)$ et dont on connait le développement limité d'ordre 2 centré en ce point. Quel est le développement limité centré à l'origine de la fonction $(x, y, z) \mapsto e^{xy} f(x, y, z)$?

Exercice 21. Écrire le développement de Taylor d'ordre 2 centré en $(0, 0, 0)$ d'une fonction $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que

$$f(0,0,0) = 1, \qquad \nabla f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où H est la matrice Hessienne de f à l'origine. Donner ensuite un exemple d'une telle fonction.

3 Extrema libres de fonctions de plusieurs variables

Exercice 22. Soit $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ et $g(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3xy$. Montrer que l'origine est un point critique(=stationnaire) pour f et g. Étudier le signe de $f - f(0, 0)$ et $g - g(0, 0)$ et en déduire la nature.

Exercice 23. Soit $f(x, y) = rx^2 + 2s\,xy + t\,y^2$, $s, t \in \mathbb{R}$. Montrer que si $rt - s^2 > 0$ alors l'origine est un extremum global strict. Préciser s'il s'agit d'un point de minimum ou de maximum (distinguer les cas $r > 0$ et $r < 0$). Que peut-on dire de l'origine si $rt - s^2 < 0$?

Exercice 24.
1. Déterminer les points critiques de la fonction $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$. Pour chaque point critique, écrire la formule de Taylor d'ordre 2 pour f, centrée à ce point. Etudier les extrema relatifs (ou locaux) de $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$. Établir si f admet des extrema absolus (ou globaux).
2. Mêmes questions pour

$$\begin{array}{ll} (a) & f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3 \\ (b) & f(x,y) = (3x+4y)e^{-(x^2+y^2)} \\ (c) & f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^3 \\ (d) & f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy \end{array}$$

Exercice 25. On considère la fonction

$$f(x,y) = 1 + (x+\sqrt{2}y)^2 + ax^4 \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Déterminer les valeurs du paramètre a telles que l'origine soit (i) un point de col (ii) un point de minimum local (iii) un point de minimum local strict.

Exercice 26. On considère la fonction

$$f(x,y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

1. Etudier les extrema relatifs (locaux) de f sur $\mathbb{R}^2$. *Suggestion:* on pourra utiliser les symétries de la fonction $f(x,y)$ pour réduire le nombre de cas à étudier.
2. Démontrer que $f(x,y) \to 0$ quand $(x,y) \to \infty$.
3. Déduire de ce qui précède l'existence des extrema globaux de f sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer les extrema globaux.

Exercice 27. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. f possède-t-elle des extrema absolus sur $\mathbb{R}^2$?
3. Représenter $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0; y \geq 0; x+y \leq 1\}$
   Justifier l'existence d'un maximum absolu et d'un minimum absolu pour f dans T. Les déterminer.

Exercice 28. On considère l'application $F(x,y) = \sqrt{y-x^2} + \sqrt{1-x^2-y}$.

1. Trouver l'ensemble $\mathcal{D}$ de tous les points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ où $F(x,y)$ est bien définie. Représenter graphiquement cet ensemble.
2. On note par $\partial\mathcal{D}$ la frontière $\mathcal{D}$. Étudier la restriction de f à $\partial\mathcal{D}$. Calculer
$$\min_{(x,y)\in\partial\mathcal{D}} F(x,y) \qquad \text{et} \qquad \max_{(x,y)\in\partial\mathcal{D}} F(x,y).$$
3. Trouver les points critiques de F à l'intérieur de $\mathcal{D}$.
4. Donner la nature de ces points (il n'est pas indispensable de calculer les dérivées secondes de F). En déduire la valeur de
$$\min_{(x,y)\in\mathcal{D}} F(x,y) \qquad \text{et} \qquad \max_{(x,y)\in\mathcal{D}} F(x,y).$$

Exercice 29. Soient $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant les développements limités centrés à l'origine $f(x,y) = 1 + 2x^2 + 3y^4 + o(\|(x,y)\|^4)$ et $g(x,y,z) = 1 + 2x^2 + 3y^4 + o(\|(x,y,z)\|^4)$. L'origine est-il un point stationnaire pour f ? Et pour g ? Peut-on en préciser la nature ?

Exercice 30. Mettre sous "forme canonique" les formes quadratiques de trois variables suivantes, c'est à dire, écrire $Q(x,y,z)$ comme la somme de trois termes de la forme $(ax+by+cz)^2$. Établir ensuite si elles sont sont de signe défini (c'est à dire si $Q \geq 0$ ou $Q \leq 0$ dans $\mathbb{R}^2$).

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= x^2 + y^2 + xy + 2z^2 \\ Q(x,y,z) &= x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5yz + 6xz \end{aligned}$$

Exercice 31. Écrire les formules de Taylor d'ordre 2 pour $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2+\frac{4}{3}z^3+xy-2x-y+1$, centrées aux points critiques de f. Déterminer ensuite la nature de ces points.

Exercice 32. Étudier la nature des points critiques des fonctions définies par

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{1}{2}x^2 + xyz + y - z \\ f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + 2x - 2y - 4z + 5 \\ f(x,y,z) &= 2x^2y - y^2 - x^4 - z^2. \end{aligned}$$

Préciser si les extrema trouvés sont stricts.

4 Intégrales multiples

Exercice 33. Calculer $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dans les cas suivants :

1)	$f(x,y) = \ln(x+y+1)$	D est le triangle de sommets O, $A(1,0)$, $B(0,1)$.
2)	$f(x,y) = (2x-y)^2$	D est le parallélogramme limité par les droites d'équations. $y = x$, $y = 2x$, $y = x+1$, $y = 2x-2$.
3)	$f(x,y) = e^{x+y}$	D est l'ensemble des points tels que $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \leq 1$.
4)	$f(x,y) = (x+2y)^2$	D est le triangle de sommets O, $A(1,1)$, $B(2,1)$.

Exercice 34. Calculer $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en utilisant les coordonnées polaires :

1)	$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$	D est la couronne limitée par le cercle de centre O et rayons $0 < a < b$.
2)	$f(x,y) = (x+y)^2$	D est le disque de centre O et de rayon $a > 0$.

Exercice 35. Calculer les intégrales doubles $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ suivantes à l'aide du changement de variables indiqué :

1)	$f(x,y) = 1$	D est limité par les courbes d'équations $y = ax$, $y = x/a$, $y = b/x$, $y = 1/(bx)$, avec $a, b > 1$ et $x > 0$. Poser $x = u/v$ et $y = uv$.
2)	$f(x,y) = x^2 + y^2$	D est limité par l'ellipse d'équation $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Poser $x = au\cos v$, $y = bu\sin v$.

Exercice 36. On considère une balle de rayon R et densité volumique δ_0 (constante).

1. Calculer le moment d'inertie par rapport à son centre de gravité
2. Calculer le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité.

Exercice 37. Soit E un solide homogène de rotation, obtenu en faisant tourner autour de l'axe z l'ensemble $F = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \colon a < z < b,\ 0 < x < f(z)\}$. Démontrer que le moment d'inertie de E par rapport à l'axe z est donné par

$$\frac{\pi}{2}\int_a^b f(z)^4\,\mathrm{d}z.$$

Exercice 38. Un matériau est distribué dans le cube $D = [0,R]^3$ selon la densité volumique $f(x,y,z) = \frac{x+y}{(z+1)^2}$. Calculer la masse totale.

Exercice 39. Dessiner et ensuite trouver le volume et le centre de gravité du solide

$$D = \{(x,y,z) \colon |x| + |y| + |z| \leq 2,\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}.$$

Exercice 40. Trouver le centre de masse du demi-cylindre homogène

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq H,\ y \geq 0\}.$$

Exercice 41. Calculer le centre de masse du solide Ω composé de la demi-boule B_R^- et du cylindre C_R suivant :

$$B_R^- = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 + x^2 \leq R^2,\ z \leq 0\},$$

et

$$C_R = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq R\},$$

en supposant que la densité de masse est $\mu(x, y, z) = z^2$.

Exercice 42. On note C_R et D_R respectivement le carré $[-R, R]^2$ et le disque centré en 0 et de rayon R. Démontrer que

$$\lim_{R\to+\infty} \iint_{C_R} \exp(-x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{R\to+\infty} \iint_{D_R} \exp(-x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

On notera $\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ cette limite.

Calculer $\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en utilisant les coordonnées polaires.

Déduire de la première question et du théorème du Fubini que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

5 Courbes paramétrées et surfaces

Exercice 43. Paramétrer la courbe définie par l'équation $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

Exercice 44. Trouver les équations de la droite tangente et du plan normal à la courbe $x = t - 2, y = 3t^2 + 1, z = 2t^3$, au point où celle-ci coupe le plan yOz.

Exercice 45. Soit $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$. Donner une paramétrisation de la ligne de niveau de f passant par (a, b). Calculer l'amplitude de l'angle formé par cette ligne et le vecteur $\nabla f(a, b)$.

Exercice 46. Calculer la longueur de l'arc de parabole défini par $y = ax^2$ pour $0 \leq x \leq 1$, avec $a > 0$. (*Indication :* les intégrales de la forme $\int \sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$ se calculent via le changement de variable $x = \sinh u$ et la relation $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$).

Exercice 47. La *spirale logarithmique* est définie par $\gamma(t) = (e^{at} \cos t, e^{at} \sin t)$, $a > 0$

1. Dessiner la spirale logarithmique.
2. Montrer que la spirale logarithmique fait un angle constant avec la droite joignant un point courant à l'origine.
3. Calculer la longueur de l'arc entre $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$.
4. Montrer que $\gamma(t) \mapsto (0, 0)$ quand $t \mapsto -\infty$.
5. Montrer que la longueur de l'arc entre 0 et t a une limite finie quand $t \mapsto -\infty$.

Exercice 48. 1. Déterminer la longueur de l'arc de courbe (appellée *cycloïde*) défini par

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \qquad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

2. On considère l'hélice circulaire à pas constant définie par

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = ht \end{cases}$$

- Montrer que la tangente forme avec l'axe Oz un angle constant.
- Calculer la longueur d'un spire d'hélice ($t \in [0, 2\pi]$).

Exercice 49. 1. Soit Γ la courbe paramétrée en coordonnées polaires par $\rho = \rho(t)$ et $\theta = \theta(t)$, où $t \in [a, b]$. Montrer que la longueur de Γ est

$$\int_a^b \sqrt{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2}\, dt.$$

En déduire une formule pour la longueur d'une courbe définie en *forme polaire* (c'est à dire, une courbe paramétrée par $\rho = \rho(\theta)$).

2. Tracer et calculer la longueur des courbes définies par

$$\begin{array}{lll} \rho = \theta, & 0 \le \theta \le \pi & \\ \rho = 2(1 + \cos\theta), & -\pi \le \theta \le \pi & \textit{(cardioïde).} \end{array}$$

Ces paramétrisations sont-elles régulières ? La droite tangente à ces courbes en $(0, 0)$ existe-t-elle ?

Exercice 50. Déterminer le rayon de courbure minimum de la courbe donnée par le graphe de la fonction $y = \ln x$, $x > 0$.

Exercice 51. Soit $a > 0$. Tracer la courbe paramétrée (astroïde) par

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Mettre en évidence les symétries remarquables de la courbe et montrer que l'on peut se limiter à l'étudier sur l'intervalle $t \in [0, \pi/2]$.
- Construire les droites tangentes aux points singuliers.

Exercice 52. Étudier et construire la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}, t \in [0, 1].$$

Même question en supposant maintenant $t \in \mathbb{R}$: se ramener au cas $t \in [0, 1]$ en calculant $(x(-t), y(-t))$ et $(x(\frac{1}{t}), y(\frac{1}{t}))$. Quelles symétries de la courbe peut-on en déduire ?

Exercice 53. Former une équation cartésienne du plan tangent en un point régulier quelconque de la surface paramétrée par

$$\begin{cases} x = \sinh u \\ y = \sinh v \\ z = u + v. \end{cases}$$

Exercice 54. Former une équation cartésienne du support de la nappe paramétrée par

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = uv \\ z = u^2 + v^2. \end{cases}$$

Exercice 55. Paramétrer la surface latérale d'un cône de hauteur h et base circulaire de rayon a. En utilisant les coordonnées cylindriques et la théorie des nappes paramétrées, calculer l'aire de cette surface.

Exercice 56. 1. Calculer l'intégrale sur la surface

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = x^3, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \pi\}$$

de la fonction définie par $f(x, y) = 3x^3 \sin y$.

2. Calculer l'intégrale sur la surface

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \le z \le 3\}$$

de la fonction définie par $f(x, y) = x + 1$.

6 Fonctions implicites et optimisation sous contrainte

Exercice 57. Montrer que l'égalité $2e^{x+y} + y - x = 0$ définit $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(1, -1)$. Calculer $\varphi'(1)$ et $\varphi''(1)$.

Exercice 58. Donner l'allure de $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0\}$ au voisinage des points $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Exercice 59. Montrer que l'équation : $x^3 + y^3 - 3xy = 1$ définit au voisinage de $x = 0$ une fonction implicite : $y = \varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 1$. Donner le DL de φ en 0 à l'ordre 3.

Exercice 60. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$. Montrez qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

Exercice 61. On considère le système d'équations:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

Montrer que, pour x proche de l'origine, il existe des fonctions positives $y(x)$ et $z(x)$ telles que $(x, y(x), z(x))$ soit solution du système. On déterminera y' en fonctionde x, y et z' en fonction de x, z.

Utilisation des multiplicateurs de Lagrange

Exercice 62. Démontrer que la fonction $f(x, y, z) = 4y - x - z$ possède un minimum absolu sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Ensuite le calculer, en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Exercice 63. Trouver le point sur le plan d'équation $2x + y + z = 6$ et dans $\mathbb{R}^3_+$ qui maximise le produit xyz de ses coordonnées.

Exercice 64. On s'intéresse à la surface de niveau de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation

$$g(x, y, z) = x^2(y - 3)^2 + y^2 + y + z^2 - 1 = 0.$$

1. Démontrer que S est bornée
   Indication : Démontrer que si $(x, y, z) \in S$ alors $|y| \leq (1 + \sqrt{5})/2$, ensuite que $z^2 \leq 3$ et $x^2 \leq 3$.
2. En déduire que la fonction $f(x, y, z) = y + 2z$ atteint un minimum et un maximum sur S.
3. Démontrer que le gradient de g ne s'annule en aucun point de S.
4. Déterminer les points où f atteint ses bornes sur S. Pour chacun des deux points trouvés, préciser si le point correspond au maximum ou au minimum de f.

Exercice 65. On considère la fonction $f(x_1, \ldots x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$, définie sur $\mathbb{R}^n_+$. Maximiser f sous la contrainte $x_1 + \cdots + x_n = n$. En déduire l'inégalité entre les moyennes géométrique et arithmétique : $\sqrt{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$.

Exercice 66. On s'intéresse au minimum et au maximum de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous les contraintes $x + y - z = 0$ et $\frac{1}{16}x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

1. Donner une interprétation géométrique du problème et prouver l'existence des extrema.
2. Appliquer la règle des multiplicateurs de Lagrange et résoudre le système de 5 équations et 5 inconnues donnant les points stationnaires de la Lagrangienne. [Réponse : $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$ et $\pm\frac{1}{3}(4, -2, 2)$].
3. Conclure.

Exercice 67. Trouver de deux manières différentes le minimum et le maximum de la fonction $f(x, y, z) = x + 3y - z$ sur l'ensemble défini par les équations $x^2 + y^2 - z = 0$ et $z = 2x + 4y$: (i) par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. (ii) En cherchant une paramétrisation de la contrainte.

Exercice 68. Parmi toutes les boîtes sans couvercle à forme de parallélépipède et de surface égale à 12, trouver celle de volume maximal.
(*Indication :* La difficulté principale ici est de démontrer que le problème possède une solution. Commencer par démontrer que si l'une des longuers x, y ou z de la boîte tend vers l'infini, alors le volume V tend vers 0. Cela permet de restreindre le problème à un compact $0 \leq x, y, z \leq R$. Cela garantit l'existence d'un maximum. Pour le déterminer, appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange).

Exercice 69. Optimiser la fonction $f(x, y) = xy$ sur $\mathbb{R}^2$ et sous la contrainte $g(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$.

Exercice 70. Optimiser $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 2\}$.