# Topologie et théorie de la mesure

*Georges Tomanov*

Université Lyon I
Semestre d'automne 2019-2020

# Chapitre 1

# Rappels et premières définitions

## 1.1 Limites, sous-ensembles, dénombrabilité

Dans la théorie on introduit les "nombres" $-\infty$ et $\infty$ sur la droite réelle étandue $\overline{\mathbb{R}} \stackrel{def}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ et/ou sur la demi-droite réelle étandu $\overline{\mathbb{R}}^+ \stackrel{def}{=} \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$. Si $x \in \mathbb{R}$ alors $-\infty < x < \infty$ et $-\infty < \infty$. La somme $x + y$ avec $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ est définie à l'exception du cas où $x = \pm\infty$ et $y = -x$. Le produit $tx$, $t \in \mathbb{R}, x \in \overline{\mathbb{R}}$ est défini sauf si $t = 0$ et $x = \pm\infty$.

**Notations.** Si $\emptyset \neq A \subset \overline{\mathbb{R}}$ alors

$$\text{sup}A \stackrel{def}{=} \text{le plus petit majorant } M \text{ de } A,$$

$$\text{inf}A \stackrel{def}{=} \text{le plus grand minorant } m \text{ de } A.$$

Si $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ alors on écrit souvent

$$x \vee y \stackrel{def}{=} \max\{x, y\},$$

$$x \wedge y \stackrel{def}{=} \min\{x, y\}.$$

**Définition 1.1.** 1. Un ensemble $A$ est *dénombrable* s'il est en correspondance bijective avec $\mathbb{N}$, autrement dit, s'il existe une application *bijective* $x : \mathbb{N} \to A$ qui permet d'énumérer $A$ (i.e. $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.)

2. Un ensemble est *au plus dénombrables* (a.p.d.) s'il est soit fini soit dénombrable.

**Définition 1.2.** Soit $(u_n)$ une suite de $E$. On appelle *suite extraite* ou *sous-suite* une suite de la forme $v_n = u_{\phi(n)}$, pour $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

**Définition 1.3.** On appelle *valeur d'adhérence* d'une suite réelle $(u_n)$ toute limite d'une suite extraite convergente.

Vu en L1 :

**Proposition 1.4.** *Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite. (Autrement dit, toute suite convergente n'a qu'une seule valeur d'adhérence, sa limite.) Réciproquement, une suite réelle converge si et seulement si elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence.*

**Définition 1.5.** Si $(x_n) \subset \mathbb{R}$, alors $\limsup x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$ et $\liminf x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k$.

Il est facile à voir que

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -\limsup_{n\to\infty} -x_n.$$

**Proposition 1.6.** *On a toujours, pour toute valeur d'adhérence $l$ de $(x_n)$ :*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \geq l \geq \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

*La suite $(x_n)$ converge si et seulement si :*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

**Preuve:**

Le deuxième point est une conséquence du premier point et de la Proposition 1.4. En passant à la suite des opposées il faut prouver que $\limsup_{n\to\infty} x_n \geq l$. La preuve est facile si $l = \infty$. Supposons que $l \in \mathbb{R}$. Si $(x_{\phi(n)})$ est extraite de $(x_n)$ de limite $l$, on a

$$\sup_{k\geq n} x_k \geq \sup_{k\geq n} x_{\phi(k)}$$

car $\phi(k) \geq k$ et $\{\phi(k) : k \geq n\} \subset \{k \geq n\}$ pour chaque $n$. En passant à la limite, on obtient :

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \geq \limsup_{n\to\infty} x_{\phi(n)}.$$

Donc, il suffit de montrer que si $l = \lim_{n\to\infty} x_n$ alors $l = \limsup_{n\to\infty} x_n$. Pour chaque $\epsilon > 0$ il existe $n(\epsilon) > 0$ tel que $l - \epsilon < x_n < l + \epsilon$ si $n > n(\epsilon)$. Donc,

$$l - \epsilon < \sup_{n>m} x_n < l + \epsilon \text{ pour tous } m \geq n(\epsilon) \Rightarrow \ l - \epsilon \leq \limsup_{n\to\infty} x_n < l + \epsilon.$$

Par conséquence, $l = \limsup_{n\to\infty} x_n$. □

Pour des fonctions réelles $f_n$, on définit les limsup et liminf ponctuellement

$$(\limsup_{n\to\infty} f_n)(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x),$$
$$(\liminf_{n\to\infty} f_n)(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x).$$

**Notations.**
1. $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble $\Omega$.
2. $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ est *la difference symétrique* de $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.
3. Si $A \subset \Omega$ alors $A^c = \Omega \setminus A$ est *le complément de $A$ (dans $\Omega$).*

**Rappel 1.7.** On rappelle que $\emptyset^c = \Omega, \Omega^c = \emptyset, (A^c)^c = A$, $A \cup A^c = \Omega, A \cap A^c = \emptyset$. Pour une famille $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(\Omega)$ on a :

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c, \tag{1.1}$$

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c. \tag{1.2}$$

**Rappel 1.8.** Soit $f : \Omega \to E$ une application. On rappelle les propriétés des images réciproques :

$$(f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c),$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \tag{1.3}$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

**Exercice 1.9.** Soit $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que

1. $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ;
2. $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$.

**Définition 1.10.** Une suite $(A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)$ est

1. croissante (dans $\mathcal{P}(\Omega)$) si $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n$ ;
2. décroissante (dans $\mathcal{P}(\Omega)$) si $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n$ ;
3. la suite $(A_n)$ est une suite d.d.d. (acronyme pour "deux à deux disjointes") si $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$.

**Notations.** 1. $A_n \nearrow A$ signifie que la suite $(A_n)$ est croissante et $A = \cup A_n$ ;

2. $A_n \searrow A$ signifie que la suite $(A_n)$ est décroissante et $A = \cap A_n$ ;
3. si $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles d.d.d. on utilisera souvant la notation $\sqcup_{i\in I} B_i$ au lieu de $\cup_{i\in I} B_i$.

**Exercice 1.11.** 1. Soit $A_1$ et $A_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors $A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \sqcup (A_1 \Delta A_2)$ et $A_1 \sqcup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \sqcup (A_2 \setminus A_1)$.

2. Soit $A_1, A_2, \cdots A_n \in \mathcal{P}(\Omega), n \geq 2$. Alors $A_1 \cup \cdots \cup A_n = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_m$ et chaque $A_i$ est union de sous-ensembles parmi les $\{B_1, \cdots, B_m\}$. (Indication : recurrence sur $n$.)

**Définition 1.12.** Soient $n > 1$, $A_i \in \mathcal{P}(\Omega_i), 1 \leq i \leq n$. Alors $A_1 \times \cdots \times A_n$ est *un pavé* dans $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$.

**Exercice 1.13.** 1. L'union de deux pavés dans $\Omega_1 \times \Omega_2$ est égale à l'union d'au plus 5 pavés d.d.d.

2. Soit $P_1$ et $P_2$ des pavés dans $\Omega_1 \times \Omega_2$. Alors chacun des ensembles $P_1^c, P_1 \cap P_2, P_1 \setminus P_2, P_1 \Delta P_2$ est union de pavés d.d.d.
3. L'union d'un nombre fini de pavés dans $\Omega_1 \times \Omega_2$ est égale à l'union d'un nombre fini de pavés d.d.d. (Indication : recurrence sur le nombre de pavés.)
4. Généraliser 2 et 3 pour les pavés dans $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n, n \geq 2$.
5. Soit $\Omega_i = \mathbb{R}$ pour tous $i$. Le pavé $A_1 \times \cdots \times A_n$ est dite *connexe* si chaque $A_i$ est un interval (fermé, ouvert ou semi-ouvert) dans $\mathbb{R}$. Alors l'union d'un nombre fini de pavés connexes dans $\mathbb{R}^n$ est égale à l'union d'un nombre fini de pavés connexes d.d.d. (Rappelons que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.)

**Notation.** Soit $A \subset \Omega$. *La fonction indicatrice* $1_A$ est définie par

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exercice 1.14.** Soit $(A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)$. On pose

$$\liminf A_n \overset{def}{=} \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k, \tag{1.4}$$

$$\limsup A_n \overset{def}{=} \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k. \tag{1.5}$$

1. Montrer que

$$\liminf A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ pour n assez grand}\},$$

$$\limsup A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ pour un nombre infini de n}\}.$$

2. Montrer que la limite supérieur des fonctions indicatrices de $A_n$ est donnée par la fonction indicatrice de la limite supérieur des ensembles $A_n$ :

$$\limsup_n 1_{A_n} = 1_{\limsup A_n}. \tag{1.6}$$

3. De même, montrer que :

$$\liminf_n 1_{A_n} = 1_{\liminf A_n}. \tag{1.7}$$

## 1.2 Compléments (facultatifs) sur les ensembles dénombrables (non vus en cours, extrait d'un cours de L2 mathématique)

### 1.2.1 Ensembles finis et infinis

On va définir les ensembles finis comme les ensembles en bijection avec une partie de la forme

$$[\![1, n]\!] := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}$$

pour $n \in \mathbb{N}$. On remarquera que pour $n = 0$, on a $[\![1, n]\!] = \emptyset$.

On rappelle que $\mathfrak{S}_n$ est l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même.

On commence par une proposition qui dit que ces ensembles ne sont pas en bijection.

**Proposition 1.15.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Si $[\![1, n]\!]$ est en bijection avec $[\![1, m]\!]$ alors $m = n$.*

**Preuve:**

On montre la propriété par récurrence sur $n$. Pour $n = 0$, l'énoncé est vrai car l'ensemble vide n'est en bijection qu'avec l'ensemble vide.

Supposons le résultat vrai au rang $n \geq 0$. Soit $h : [\![1, n+1]\!] \to [\![1, m]\!]$ une bijection (donc forcément $m \geq 1$ comme le premier ensemble n'est pas vide). On distingue 2 cas :

Le cas simple est le cas $h(n+1) = m$, alors on définit $g : [\![1, n]\!] \to [\![1, m-1]\!]$ par $g(k) = h(k)$. $g$ est bien défini car $h$ est une bijection donc pour $k \neq n+1$, $h(k) \neq h(n+1) = m$, donc $h(k) < m$. $g$ est injective car la restriction d'une application injective est encore injective. Soit $l \in [\![1, m-1]\!]$ il existe $k \in [\![1, n+1]\!]$ tel que $h(k) = l$ par surjectivité de $h$. Mais $l \neq n+1$ par injectivité comme ci-dessus, donc $k \in [\![1, n]\!]$ et donc $g(k) = l$. Cela montre la surjectivité de $g$. Donc, par l'hypothèse de récurrence, $n = m - 1$ et donc $m = n + 1$.

Le second cas est le cas $h(n+1) < m$. On a vu au premier semestre l'existence de la transposition $\tau = (h(n+1), m)$ de sorte que $\tau \circ h$ est encore une bijection par composée de bijection et elle vérifie le premier cas. D'où l'étape suivante de la récurrence dans tous les cas. □

**Définition 1.16.** On dit qu'un ensemble A est *fini* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, qui est alors unique (par le lemme précédent), et une bijection $f : [\![1, n]\!] \to A$. On écrit alors $Card(A) = n$ ou $|A| = n$. Un ensemble qui n'est pas fini est dit *infini*.

### 1.2.2 Ensembles au plus dénombrables

On peut représenter les éléments d'un ensemble dénombrable A à l'aide d'une suite infinie en écrivant $A = \{x_n; n \geq 1\}$.

**Proposition 1.17.** *Les ensembles au plus dénombrables sont soit finis, soit dénombrables. De plus, pour une partie infinie $P \subset \mathbb{N}$, il existe une bijection strictement croissante et une seule de $\mathbb{N} \to P$.*

**Preuve:**

Les ensembles au plus dénombrables sont par définition en bijection avec les parties de $\mathbb{N}$. Dans le cas infini, il suffit de voir le second point pour obtenir la bijection avec $\mathbb{N}$. On définit par récurrence la bijection $f : \mathbb{N} \to P$. Plus précisément, on construit par récurrence sur $n$ une application strictement croissante $f_n : [\![1, n]\!] \to P$ telle que pour tout $x \in Im(f_n), y \in P - Im(f_n)$, $x < y$ et $f_n|_{[\![1,k]\!]} = f_k$. Comme $P$, infini, il est non-vide donc admet un élément $a_0 = \min(P)$ On pose $f_0(0) = a_0$ d'où l'initialisation.

On suppose construit $f_n$, et on prend $a_{n+1} = min(P - Im(f_n))$ qui existe car cette partie est infinie de $\mathbb{N}$ donc non vide (si elle n'était pas infinie, P serait finie comme union finie de parties finies). On pose $f_{n+1}(k) = f_n(k), k \leq n, f_{n+1}(n+1) = a_{n+1}$ de sorte que par l'hyp de rec sur $f_n$, $a_{n+1} > f_n(k), k \leq n$ ce qui donne la stricte croissance de $f_{n+1}$ en combinant avec celle de $f_n$. Enfin, si $y \in P - Im(f_{n+1}) \subset P - Im(f_n)$ on a par hyp de rec $y > f_n(k)k \leq n$ et $y > a_{n+1}$ car c'est le min donc $\geq$ et on a $y \neq a_{n+1}$ par construction. Donc la relation demandée à l'étape suivante est vérifiée.

On obtient $f$ strictement croissante donc injective en rassemblant les valeurs des $f_n$ qui s'accordent $(f(n) = f_n(n) = f_m(n), m \geq n)$.

Pour voir que $f$ bijective, par l'absurde, sinon il existe $b \in P - Im(f)$ mais par stricte croissance d'entiers $f(n) \to \infty$ donc il existe $n$ minimal tel que $b < f(n) = f_n(n)$ ce qui impose par minimalité $b > f(n-1)$ et contredit $f_n(n) = Min(P - Im(f_{n-1}))$ vu $b \in P - Im(f_{n-1})$.

Pour l'unicité, si $g$ est une autre telle bijection $g^{-1} \circ f$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ainsi que sa réciproque et le lemme suivant donne donc $g^{-1} \circ f(n) \geq n, f^{-1} \circ g(n) \geq n$. D'où par croissance de $g, f$ appliquée encore à ces relations : $f = g$. □

**Proposition 1.18.** *Une application strictement croissante $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (resp. $f : [\![0, n]\!] \to \mathbb{N}$) vérifie $f(p) \geq p$ pour tout $p$ dans son domaine.*

**Preuve:**

Il suffit de voir le deuxième cas (en restreignant aux segments initiaux), on le montre par récurrence sur $n$. Si $n = 0$ , $f(0) \in \mathbb{N}$ donc c'est évident. En supposant l'hypothèse vraie au rang $n$, on considère $f : [\![0, n+1]\!] \to \mathbb{N}$, la restriction à $[\![0, n]\!]$ vérifie l'hypothèse de récurrence, donc $f(p) \geq p$ pour $p \leq n$ et $f(n+1) > f(n) \geq n$ mais dans $\mathbb{N}$ cela implique $f(n+1) \geq n+1$ et conclut l'étape d'induction. □

On trouve l'équivalence avec la définition vu à la section 1.

**Proposition 1.19.** *Un ensemble $P$ est au plus dénombrable si et seulement si il existe un surjection $f : \mathbb{N} \to P$.*

**Preuve:**

Pour l'implication directe, si $P$ est dénombrable, la bijection de la définition convient, si $P$ est fini, en bijection avec $[\![0, n-1]\!]$ alors le reste modulo $n$ donne la surjection $\mathbb{N} \to [\![0, n-1]\!]$ qui composée à la bijection donne la surjection cherchée. Réciproquement, l'ensemble $f^{-1}(p), p \in P$ est une partie de $\mathbb{N}$ qui a un plus petit élément $a_p$ : $a : P \to \mathbb{N}$ est l'injection cherchée. □

On va obtenir des exemples d'ensembles dénombrables les plus courants. Pour cela on a besoin de quelques méthodes de constructions.

**Proposition 1.20.**

1. *La réunion d'une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ d'ensembles finis d.d.d. est au plus dénombrable.*
2. *Un ensemble $X$ est au plus dénombrable si et seulement si il admet une* suite exhaustive *de parties finies, c'est à dire une suite croissante de parties finies dont l'union est $X$.*
3. *Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.*

**Preuve:**

1. Soit $a_n = Card(X_n)$ et $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ $(A_{-1} = 0)$. On a des bijections $h_n : [\![A_{n-1} + 1, A_n]\!] \to [\![1, a_n]\!] \to X_n$ qui induisent une application $h : \mathbb{N}^* \to \cup_n X_n$ dès qu'un nombre infini de $X_i$ n'est pas vide, ou $h : [\![1, A_p]\!] \to \cup_n X_n$ qui est par construction surjective. L'injectivité des $h_n$ et le fait que les $X_n$ sont disjoints donne l'injectivité de $h$.

2. Si $X$ est fini, on prend la suite constante, sinon, pour une bijection $h : \mathbb{N} \to X$ on prend $X_n = h([\![0, n]\!])$ comme suite croissante cherchée. Réciproquement, la suite croissante $X_n$ donne une suite disjointe $X_0$, $X_{n+1} - X_n$ de parties finies, donc le point 1. donne que l'union est au plus dénombrable.

3. Une récurrence triviale ramène au cas du produit de 2 ensembles $A, B$. Soit $h : \mathbb{N} \to A$, $g : \mathbb{N} \to B$ des surjections données par la proposition 1.19. $f = h \times g : \mathbb{N}^2 \to A \times B$ est une surjection qui ramène au cas $\mathbb{N}^2$ qui admet pour suite exhaustive d'ensembles finis $[\![0, n]\!]^2$. □

**Proposition 1.21.** *Les ensembles $\mathbb{N}^k, k \in \mathbb{N}^*; \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^k$ sont infinis dénombrables.*

**Preuve:**

On a vu le cas du produit $\mathbb{N}^k$ au lemme précédent. $[\![-n, n]\!]$ est une suite exhaustive d'ensembles finis pour $\mathbb{Z}$ qui est donc au plus dénombrable par la proposition précédente, il est infini car il contient $\mathbb{N}$. Enfin $(p, q) \mapsto p/q$ est une surjection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, donc par la proposition 1.19 $\mathbb{Q}$ est au plus dénombrable, et infini car contient $\mathbb{N}$. □

Enfin, on améliore le lemme précédent.

**Proposition 1.22.** *Une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.*

**Preuve:**

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ensembles dénombrables (si la suite est finie, on peut la prolonger en une suite infinie. ). Soit $f_n : \mathbb{N} \to X_n$ une surjection donnée par la proposition 1.19. (Petite subtilité : passer de l'existence de chaque surjection à $n$ fixé, à la suite de surjections n'est pas complètement anodin et utilise l'axiome du choix dénombrable). On considère la fonction $f : \mathbb{N}^2 \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ définie par $f(n, p) = f_n(p)$ et en composant avec une surjection $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, on obtient le résultat par la réciproque dans la proposition juste citée. □

Les ensembles au plus dénombrables serviront de base aux probabilités discrètes.

### 1.2.3 Ensembles infinis non dénombrables

Les ensembles qui n'appartiennent pas aux catégories précédentes (finis ou infinis dénombrables) sont dits infinis non dénombrables. On va voir que par exemple, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, $[a, b]$, $a < b$ sont infinis non dénombrables.

Le résultat clé est toujours un argument diagonal :

**Proposition 1.23.** *(Théorème de Cantor) Il n'existe pas de surjection $h : E \to \mathcal{P}(E)$ entre un ensemble $E$ et l'ensemble de ses parties.*

**Preuve:**

En effet une application $h : E \to \mathcal{P}(E)$ permet de considérer l'ensemble $A = \{x \in E : x \notin h(x)\}$. Il n'existe pas de $y$ tel que $h(y) = A$ car par l'absurde, si il existait, soit $y \in A$ et alors $y \notin h(y) = A$ une contradiction, soit $y \notin A$ et alors $y \in h(y) = A$ encore une contradiction. $\square$

**Remarque 1.24.** En conséquence de ce lemme et de la proposition 1.19, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable (il est infini à cause de l'injection $x \mapsto \{x\}$ défini sur $\mathbb{N}$), car sinon on aurait une surjection de $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. En conséquence $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, en bijection avec la fonction indicatrice n'est pas non-plus dénombrable.

**Théorème 1.25.** $[0, 1]$ *et* $\mathbb{R}$ *ne sont pas dénombrables.*

En conséquence un intervalle quelconque $[a, b]$, en bijection avec $[0, 1]$ ne l'est pas non plus. et un intervalle quelconque contenant au moins deux points (qui contient donc aussi un $[a, b]$) est aussi non-dénombrable.

**Preuve:**

On construit une injection $\varphi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$ (le cas $\mathbb{R}$ s'en déduit. (l'image de cette injection va être l'ensemble triadique de Cantor). On fixe $a = (a_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ on définit une suite de segments emboîtés, on pose $J_0 = [0, 1]$ et si $J_n = [x_n, y_n]$ alors on découpe l'intervalle en trois en posant $u_n = (2x_n + y_n)/3$ et $v_n = (x_n + 2y_n)/3$. Si $a_n = 0$, on pose $J_{n+1} = [x_n, u_n]$, et si $a_n = 1$, on pose $J_{n+1} = [v_n, y_n]$. On obtient par construction une suite de segments emboîtés, $x_n, y_n$ sont des suites adjacentes et $y_n - x_n \leq 1/3^n$ (récurrence facile) donc l'intersection est un singleton $\cap_n J_n = \{\varphi(a)\}$. Pour voir que $\varphi$ est injective on note que si $a \neq a'$ sont deux suites et $n$ le premier indice avec $a_n \neq a'_n$, alors $J_n \cap J'_n = \emptyset$ et les images sont donc distinctes. $\square$

**Remarque 1.26.** L'ensemble triadique de Cantor a plein de propriétés intéressantes. Topologiquement il est fermé, totalement disconnecté (les composantes connexes sont les singletons). Il est de longueur nulle (car inclus dans l'union sur tous les cas possibles des $J_n$ dont la longueur perd un facteur $2/3$ à chaque $n$).

**Exemple 1.** L'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est non-dénombrable, car sinon son union avec $\mathbb{Q}$ à savoir $\mathbb{R}$ serait dénombrable, ce qui n'est pas le cas.

# Chapitre 2

# Espaces mesurables

## 2.1 Clans, tribus, classes monotonnes, mesures

**Rappel 2.1.**
1. $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble $\Omega$.
2. $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ est la difference symétrique de $A, B \in \Omega$.
3. $A^c = \Omega \setminus A$.

**Définition 2.2.** Un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est un *clan* (ou une *algèbre* ou une *algèbre de Boole*) sur $\Omega$ si :
1. $\Omega \in \mathcal{C}$,
2. (stabilité par complémentaire) $A \in \mathcal{C}$ entraîne que $A^c \in \mathcal{C}$,
3. (stabilité par réunion finie) si $A_1, \cdots A_n \in \mathcal{C}$ alors $\cup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{C}$.

**Exercice 2.3.**
1. L'ensemble $\mathfrak{C}_1$ des unions finies d'intervales de $\mathbb{R}$ est un clan.
2. Rappelons qu'un *pavé connexe* de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme $I_1 \times \cdots \times I_n$ avec $I_k$ intervales de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathfrak{C}_n$ des unions finies de pavés connexes de $\mathbb{R}^n$ est un clan.
3. Tout élément de $\mathfrak{C}_n$ est union finie de pavés connexes de $\mathbb{R}^n$ deux à deux disjoints.

**Exercice 2.4.** Soit $\mathcal{C}$ un clan.
1. Si $A_1, \cdots A_n \in \mathcal{C}$ alors $\cap_i A_i \in \mathcal{C}$.
2. Si $A, B \in \mathcal{C}$ alors $A \setminus B \in \mathcal{C}$.

Pour faire de l'analyse on a besoin aussi d'unions dénombrables, d'où la définition que l'on utilisera le plus souvent.

**Définition 2.5.** Un sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une *tribu* (ou une $\sigma$-algèbre) sur $\Omega$ si :
1. $\Omega \in \mathcal{T}$,
2. (stabilité par complémentaire) Si $A \in \mathcal{T}$ alors $A^c \in \mathcal{T}$ .
3. (stabilité par union dénombrable) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathcal{T}$, alors l'union
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}.$$

Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ sera appelé un *espace mesurable*. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés *ensembles mesurables*.

**Remarque 2.6.** Chaque tribu est un clan.

**Exercice 2.7.** Est-ce que le clan de l'exercice 2.3 une tribu ?

**Exemple.**
1. $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu ;
2. Le sous-ensemble $\{\emptyset, \Omega\}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est un clan et une tribu, appelée clan ou tribu triviale.
3. $\Omega = \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, \{0, 1, 2\}, \{0\}, \{1, 2\}\}$ et $\mathcal{C}_2 = \{\emptyset, \{0, 1, 2\}, \{1\}, \{0, 2\}\}$. Alors $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont des algèbres mais $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ n'est pas une algèbre (car $\{0, 1\} \notin \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$).

**Exercice 2.8.** 1. Soit $\Omega$ un ensemble infini et $\mathcal{C}$ la famille de sous-ensembles de $\Omega$ finis ou de compléments finis. Alors $\mathcal{C}$ est un clan qui n'est pas une tribu ;

2. Soit $\Omega$ un espace topologique et $\mathcal{C}$ l'ensemble des ouverts (resp. des fermés) de $\Omega$. Est-ce que $\mathcal{C}$ un clan ? une tribu ?

**Exercice 2.9.** Soit $\mathcal{T}$ une tribu et $(A_n)$ une suite dans $\mathcal{T}$. Alors $\cap_i A_i \in \mathcal{T}$.

**Rappel 2.10.** 1. Une suite $(A_n)$ de parties de $\Omega$ est
   (a) croissante (dans $\mathcal{P}(\Omega)$) si $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n$ ;
   (b) décroissante (dans $\mathcal{P}(\Omega)$) si $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n$ ;
   (c) la suite $(A_n)$ est une suite d.d.d. (acronyme pour "deux à deux disjointes") si $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$.

2. $A_n \nearrow A$ signifie que la suite $(A_n)$ est croissante et $A = \cup A_n$ ;
3. $A_n \searrow A$ signifie que la suite $(A_n)$ est décroissante et $A = \cap A_n$ ;
4. si $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles d.d.d. on écrit $\sqcup_{i\in I} B_i$ au lieu de $\cup_{i\in I} B_i$.

**Définition 2.11.** Une famille $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{P}(\Omega)$ est une *classe monotonne* sur $\Omega$ si :

1. $\Omega \in \mathcal{M}$,
2. si $A, B \in \mathcal{M}$ et $B \subset A$ alors $A \setminus B \in \mathcal{M}$,
3. si $(A_n)$ est une suite croissante alors $\cup_n A_n \in \mathcal{M}$.

**Exemple 2.** 1. Chaque tribu est une classe monotonne.

2. Soit $\mathcal{A}$ une tribu (resp. un clan, resp. une classe monotonne) sur $\Omega$ et soit $X \subset \Omega$. Alors $\mathcal{A}_X \overset{def}{=} \{A \cap X : A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu (resp.un clan, resp. une classe monotonne) sur $X$ appelé la tribu induite (resp. le clan induit, resp. la classe monotonne induite) par $\mathcal{A}$ sur $X$.
3. Si $X \in \mathcal{A}$ alors $\mathcal{A}_X = \{A \in \mathcal{A} : A \subset X\}$.

**Définition 2.12.** Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Une application $\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ est une *mesure* (positive) si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. ($\sigma$-additivité) Si $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{T}$ est une suite d.d.d. alors

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Un triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ où $\mu$ est une mesure sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé *espace mesuré*. Si $\mu(\Omega) = 1$ on dit que $\mu$ est une mesure de probabilité ou simplement une probabilité. La mesure $\mu$ est *$\sigma$-finie* s'il existe une famille dénombrable $A_n \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N}$, telle que $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\mu(A_n) < \infty$ pour tout $n$.

## 2.2 Quelques propriétés de base et exemples

**Proposition 2.13.** *Soit $\mathcal{T}$ une tribu. On suppose que $A, B$ et $A_n, n \in \mathbb{N}$, sont des ensembles mesurables.*

*1. Si $A \subset B$ alors $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. En particulier, si $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

*2. Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Dans le cas général, si $\mu(A \cap B) < \infty$ alors*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

*3. Si $(A_n)$ est une suite croissante, alors*

$$\mu(\underset{n\geq 1}{\cup} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sup_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

*4. Pour une suite $(A_n)$ d'ensembles non nécessairement disjoints :*

$$\mu\Big(\underset{n\geq 1}{\cup} A_n\Big) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

*5. Si $(A_n)$ est une suite décroissante et s'il existe $n_0$ tel que $\mu(A_{n_0}) < \infty$, alors*

$$\mu(\underset{n\geq 1}{\cap} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

*Démonstration.* 1. Par la Définition 2.5(2), $A^c \in \mathcal{T}$ et par l'exercice 2.4 $B \setminus A = B \cap A^c \in \mathcal{T}$. Puisque $B = A \sqcup (B \setminus A)$, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$.

2. Si $A \cap B = \emptyset$ on unilise la Définition 2.12(2) avec $A_1 = A$, $A_2 = B$ et $A_i = \emptyset, i > 2$. En général, $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$. D'où

$$A \cup B = (\mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)) + (\mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B)) - \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

3. Soit $A_1 = B_1$ et $B_{k+1} = A_{k+1} \setminus A_k, k \geq 1$. Alors $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Comme

$$A_n = \underset{1\leq k\leq n}{\sqcup} B_k,$$

on obtient

$$\underset{n}{\cup} A_n = \underset{k}{\sqcup} B_k,$$

et par la $\sigma$-additivité

$$\mu(\underset{n}{\cup} A_n) = \sum_{k\geq 1} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{1\leq k\leq n} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

4. La suite $C_n \overset{def}{=} \underset{1\leq i\leq n}{\cup} A_i$ est croissante et $\underset{n}{\cup} A_n = \underset{n}{\cup} C_n$. En utilisant 1, on obtient par recurrence $\mu(C_n) \leq \sum\limits_{1\leq i\leq n} \mu(A_i)$. Par 3,

$$\mu\Big(\underset{i\geq 1}{\cup} A_i\Big) = \lim_{n} \mu(C_n) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(A_i).$$

5. On peut supposer que $\mu(A_1) < \infty$. Soit $B_i \overset{def}{=} A_1 \setminus A_i, i \geq 1$. Alors $B_i \nearrow A_1 \setminus \underset{i}{\cap} A_i$, $\underset{i}{\cup} B_i = A_1 \setminus \underset{i}{\cap} A_i$, et $A_1 = A_i \sqcup B_i$. Par 2 et 3,

$$\mu(\underset{i}{\cup} B_i) = \mu(A_1) - \mu(\underset{i}{\cap} A_i) = \lim_{i} \mu(B_i) = \lim_{i} (\mu(A_1) - \mu(A_i)) = \mu(A_1) - \lim_{i} \mu(A_i).$$

Donc,

$$\mu(\underset{i}{\cap} A_i) = \lim_{i} \mu(A_i).$$

□

**Exemple 3.** Si $(\mu_n)$ est une suite de mesures sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T})$ alors $\sum\limits_{n} \mu_n$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

**Exemple 4.** (Jeu de dé) Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ les 6 faces possibles d'un dé et soit $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$. On définie la probabilité $\mu(A) \overset{def}{=} \text{card}(A)/6$. Alors $\mu(A)$ représente la probabilité que $A$ survienne c.à.d. c'est le nombre de faces qui provoquent $A$ divisé par le nombre total de faces du dé.

**Exemple 5.** (Mesure de Dirac) Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable quelconque et soit $x \in \Omega$. Pour tout $A \in \mathcal{T}$ on pose

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\delta_x$ est une mesure (en effet, une probabilité). Pour montrer la $\sigma$-additivité, il suffit de noter que dans une union disjointe $x \in A_n$ pour un seul $n$, donc si $A = \bigsqcup_n A_n$, $\delta_x(A) = \delta_x(A_n) = \sum_k \delta_x(A_k)$.

**Exemple 6.** (Mesure de comptage) Pour chaque $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ on pose

$$\nu(A) = \begin{cases} Card(A) & \text{si } A \text{ fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\nu$ est une mesure. Pour montrer la $\sigma$-additivité, il suffit de observer que si les $A_n$ sont disjoints alors $Card(\bigsqcup_n A_n) = \sum_n Card(A_n)$. Notons que si $\Omega$ est dénombrable alors $\nu = \sum\limits_{x \in \Omega} \delta_x$.

**Exemple 7.** (Mesure sur la tribu induite) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $A \in \mathcal{T}$. Alors $\mu_A(B) \stackrel{def}{=} \mu(A \cap B)$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$. On peu bien sûr remplacer la tribu $\mathcal{T}$ par la tribu induite $\mathcal{T}_A \stackrel{def}{=} \{A \cap B : B \in \mathcal{T}\}$. Evidemment, $(\Omega, \mathcal{T}, \mu_A)$ et $(A, \mathcal{T}_A, \mu_A)$ sont des espaces mesurés.

**Exemple 8.** Si $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré et $\lambda \in \mathbb{R}^+$ alors $(\lambda\mu)(A) \stackrel{def}{=} \lambda\mu(A), A \in \mathcal{T}$, définie une mesure sur $\mathcal{T}$. En particulier, si $0 < \mu(A) < \infty$ alors $\mu_A(\cdot)/\mu(A)$ est une probabilité (appelée *la probabilité conditionnelle sachant* $A$).

### 2.2.1 Tribus engendrées, tribu borélienne

**Remarque 2.14.** On sait rarement décrire explicitement tous les ensembles d'une tribu. On travaille donc avec un ensemble plus petit de "générateurs" de la tribu. Ceci est basé sur la proposition suivante.

**Proposition 2.15.** *Si $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ est une famille de tribus (resp. clans, resp. classes monotones) sur $\Omega$, alors l'intersection $\cap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ est aussi une tribu (resp. clan, resp. classe monotonne).*

*Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, alors l'intersection de toutes les tribus (resp. clans, resp. classes monotones) contenant $\mathcal{E}$ est une tribu (resp. clan, resp. classe monotone). C'est la plus petite tribu (resp. clan, resp. classe monotone) contenant $\mathcal{E}$ (pour l'inclusion), appelée tribu (resp. clan, resp. classe monotone) engendrée par $\mathcal{E}$.*

**Preuve:**

On fait la preuve pour les tribus ; preuve identique pour les clans et les classes monotones.
Soit $\{\mathcal{T}_i : i \in I\}$ des tribus sur $\Omega$.
Comme $\Omega \in \mathcal{T}_i$ pour tout $i \in I$, on déduit que $\Omega \in \cap_{i \in I} \mathcal{T}_i$. Si $A \in \cap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ alors $A \in \mathcal{T}_i$ pour tout $i \in I$ donc $A^c \in \mathcal{T}_i$ (car $\mathcal{T}_i$ est une tribu donc est stable par complémentaire) pour tout $i \in I$ donc $A^c \in \cap_{i \in I} \mathcal{T}_i$. Si $A_n \in \cap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ pour tout $n \geq 0$ alors pour tout $i \in I$ et tout $n \geq 0$, $A_n \in \mathcal{T}_i$. Comme $\mathcal{T}_i$ est une tribu $\cup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{T}_i$ et ce pour tout $i$. Donc $\cup_{n \geq 0} A_n \in \cap_{i \in I} \mathcal{T}_i$. On en déduit la dernière stabilité requise, donc $\cap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ est bien une tribu.
On vient de voir que comme intersection de tribus, $\sigma(\mathcal{E})$ est une tribu qui contient clairement $\mathcal{E}$. Réciproquement, une tribu $\mathcal{T}$ contenant $\mathcal{E}$ est dans l'indice de l'intersection, donc $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{T}$, donc c'est bien la plus petite tribu contenant $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire elle est contenue dans toute tribu contenant $\mathcal{E}$). $\square$

**Notation.** Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ on désigne par $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ (resp. $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, resp. $\mathcal{M}(\mathcal{E})$) la tribu (resp. clan, resp. classe monotonne) engendrée par $\mathcal{E}$.

**Exercice 2.16.** Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Alors $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E}^c)$ où $\mathcal{E}^c \stackrel{def}{=} \{A^c : A \in \mathcal{E}\}$.

**Exercice 2.17.** Montrer que $\mathcal{T}(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

**Exercice 2.18.** Soit $\mathcal{E} = (A_i)_{i \in I}$ une partition dénombrable de $\Omega$ (c'est à dire les $A_i$ sont deux à deux disjoints et leur union est $\Omega$). Montrer que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \{\cup_{i \in J} A_i : J \subset I\}$.

**Exercice 2.19.** Si $\Omega$ est dénombrable, montrer que $\mathcal{T}(\{\omega\} \in \mathcal{P}(\Omega)) = \mathcal{P}(\Omega)$.

**Définition 2.20.** Soient $(\Omega_i, \mathcal{T}_i), i = 1, 2$, deux espaces mesurables. On appelle ensemble élémentaire de $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ une réunion fini de *pavés* $A_1 \times A_2$ avec $A_i \in \mathcal{T}_i, i = 1, 2$. La tribu produit $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ sur $\Omega$ est la tribu engendrée par les ensembles élémentaires.

**Définition 2.21.** Un espace topologique est un couple $(E, \mathcal{O})$ où $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ et

1. $\emptyset$ et $E \in \mathcal{O}$ ;
2. Pour chaque famille (dénonbrable ou non-dénombrable) $(U_i)_{i\in I}, U_i \in \mathcal{O}$, on a $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$ ;
3. Pour chaque famille finie $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{O}$ on a $\bigcap_{1\leq i\leq n} U_i \in \mathcal{O}$. (Les éléments de $\mathcal{O}$ sont les *ouverts* et les éléments de $\{U^c : U \in \mathcal{O}\}$ sont les *fermés* de l'espace topologique $(E, \mathcal{O})$.)

**Exemple 9.**
1. Si $\mathcal{O} = \mathcal{P}(E)$ alors $(E, \mathcal{O})$ est un espace topologique avec topologie discrète.
2. Si $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ alors $\mathcal{O}$ consiste des ouverts dans le sens habituel.

**Définition 2.22.** Si $\Omega$ est une espace topologique (par exemple, si $\Omega = \mathbb{R}^n$ ), on appelle *tribu borélienne*, noté $\mathcal{B}(\Omega)$, la tribu engendrée par les ouverts de $\Omega$. *Un borélien* est un ensemble appartenant à $\mathcal{B}(\Omega)$.

**Définition 2.23.**
1. Soit $\Omega$ un espace topologique et $\mathcal{U}$ une famille dénombrable des ouverts. Alors $\mathcal{U}$ est *une base (dénombrable) de* $\Omega$ si chaque ouvert est union d'éléments de $\mathcal{U}$. Donc, $\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{T}(\mathcal{U})$.
2. Soient $\Omega_1$ et $\Omega_2$ deux espaces topologiques avec de bases $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$, respectivement. Alors on a une structure d'espace topologique sur $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ telle que $\mathcal{U} \stackrel{def}{=} \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{U}_1, A_2 \in \mathcal{U}_2\}$ est sa base. L'espace topologique $\Omega$ est *le produit des espaces topologiques* $\Omega_1$ *et* $\Omega_2$.

**Exemple 10.** L'espace topologique $\mathbb{R}^2$ est produit de deux copies de l'espace topologique $\mathbb{R}$. Par recurrence, $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, est produit des espaces topologiques $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\mathbb{R}$.

**Proposition 2.24.** *Avec* $\Omega$, $\Omega_1$ *et* $\Omega_2$ *comme ci-dessus,* $\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2)$.

**Preuve:**

Rappelons que $\mathcal{B}(\Omega)$ est engendrée par les ouverts de $\Omega$. Mais chaque ouvert de $\Omega$ est union des pavés $A_1 \times A_2$ où $A_i \in \mathcal{U}_i$. Donc, $\mathcal{B}(\Omega)$ est engendrée par les pavés $A_1 \times A_2$ où $A_i \in \mathcal{U}_i$, i.e. $\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2)$. $\square$

**Corollaire 2.25.** La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est engendrée par les pavés connexes fermés $\{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] : a_i \leq b_i\}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{n}$.

**Preuve:**

Notons que $\mathbb{R}^n$ est le produit de $n$ copies de l'espace topologique $\mathbb{R}$ et les intervalles ouverts $(a, b)$ où $a$ et $b \in \mathbb{Q}$ constituent une base de $\mathbb{R}$. Par recurrence (en utilisant la proposition précédente), $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{n}$. Chaque pavé connexe fermé se représente comme intersection d'une suite de pavés connexes ouverts. Donc chaque pavé connexe fermé appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. D'autre part, chaque pavé connexe ouvert est union d'une suite de pavés connexes fermés. Mais les pavés connexes ouverts engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. D'où le résultat. $\square$

**Exercice 2.26.**
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{T}\Big(\big\{]-\infty, a], a \in \mathbb{R}\big\}\Big) = \mathcal{T}\Big(\big\{[a, +\infty[, a \in \mathbb{R}\big\}\Big).$$

## 2.3 Applications mesurables

**Rappel 2.27.** Si $f$ est une application de $\Omega$ dans $E$ et si $B \in \mathcal{P}(E)$ alors
$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$
est l'image réciproque de $B$.

**Notation.** Si $\mathcal{B}$ est une famille de parties de $E$, on notera
$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}.$$

Les formules (1.3) impliqent :

**Proposition 2.28.** *Soient $\Omega$ un ensemble et $(E, \mathcal{B})$ des espaces mesurables. Pour toute application $f : \Omega \to E$, l'ensemble $f^{-1}(\mathcal{B})$ est une tribu sur $\Omega$ (appelée tribu engendrée par $f$).*

**Définition 2.29.**
1. Soient $(\Omega, \mathcal{T}), (E, \mathcal{B})$ des espaces mesurables. Une application $f : \Omega \to E$ est dite *mesurable* (pour $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}$) si $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{T}$, c.à.d. $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$.
2. Une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans un espace topologique $E$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ est dite *borélienne.* Si $(E, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ on parle d'une fonction borélienne.
3. Si $f$ est une application d'un ensemble $\Omega$ dans un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$, on appelle *tribu engendrée par* $f$, notée $\mathcal{T}(f)$, la plus petite tribu (sur $\Omega$) qui rend $f$ mesurable ; autrement dit, $\mathcal{T}(f) = f^{-1}(\mathcal{B})$.

**Remarque 2.30.** Etant donnée une application $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (E, \mathcal{B})$, dire que $f$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(E, \mathcal{B})$ revient à dire que $\mathcal{T}(f) \subset \mathcal{T}$.

**Exercice 2.31.** Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Vérifier que $A \subset \Omega$ est mesurable si et seulement si sa fonction indicatrice $1_A$ est borélienne.

**Définition 2.32.** Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et soit $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors $f$ est dite fonction borélienne (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$) si $f^{-1}(\infty)$, $f^{-1}(-\infty)$ et $f^{-1}(\mathcal{B}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, sont tous ensembles mesurables (i.e. appartiennent à $\mathcal{T}$).

### 2.3.1 Propriétés des applications mesurables

**Théorème 2.33.** *Soient $\Omega$ un ensemble, $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $\mathcal{E}$ une famille dans $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{B} = \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Soit $f : \Omega \to E$. Alors $\mathcal{T}(f) = \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E}))$. En particulier, si $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace mesurable alors pour qu'une application $f$ de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(E, \mathcal{B})$ soit mesurable il faut et il suffit que $f^{-1}(\mathcal{E})$ soit inclus dans $\mathcal{T}$.*

**Preuve:**

Rappelons que $\mathcal{T}(f) = f^{-1}(\mathcal{B})$. Puisque $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ on a $\mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E})) \subset \mathcal{T}(f)$. Pour montrer l'inclusion réciproque on considère

$$\mathcal{A} = \{B \subset E : f^{-1}(B) \subset \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E}))\}.$$

En utilisant les formules de commutations (1.3) de l'image réciproque avec les réunions et compléments on voit que $\mathcal{A}$ est une tribu. Mais $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Donc, $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Par la definition de $\mathcal{A}$, $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E}))$. D'où, $\mathcal{T}(f) = f^{-1}(\mathcal{B}) \subset f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E}))$. □

**Corollaire 2.34.** Soient $X$ et $Y$ des espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes. Alors chaque application continue $F : X \to Y$ est borélienne. En particulier, chaque application continue $f : R^n \to R^m$ est borélienne.

**Corollaire 2.35.** Si $(E, \mathcal{E}), (F, \mathcal{F})$ et $(G, \mathcal{G})$ sont des espaces mesurables et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications mesurables alors la composée $g \circ f : E \to G$ est mesurable.

**Preuve:**

Pour $A \subset G$, on remarque que $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$. Donc, si $A \in \mathcal{G}$, alors $g^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ et $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{E}$. Ceci conclut la preuve de la mesurabilité de la composée. □

**Corollaire 2.36.** Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$. Alors l'application $(f_1, ..., f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n, a \mapsto (f_1(a), ..., f_n(a))$, est borélienne si et seulement si $f_i$ est borélienne pour tout $i$.

**Preuve:**

Si $(f_1, ..., f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ borélienne, $f_i = p_i \circ (f_1, ..., f_n)$ avec $p_i(x_1, ..., x_n) = x_i$ la i-ème projection qui est continue. Donc la composée est mesurable.

Réciproquement, par Théorème 2.33 et la définition de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ il suffit de vérifier que $(f_1, ..., f_n)^{-1}(\prod_{i=1}^n [a_i, b_i])$ est borélienne.

Mais on a :

$$(f_1, ..., f_n)^{-1}(\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]) = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}([a_i, b_i]).$$

Donc par intersection finie d'images inverses d'intervalles par des fonctions boréliennes, cet ensemble est bien mesurable. □

**Corollaire 2.37.** L'espace des fonctions boréliennes de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est stable pour les operations de multiplication par une constante $(\alpha f)(\omega) = \alpha f(\omega)$, d'addition $(f+g)(\omega) = f(\omega)+g(\omega)$, de multiplication $(fg)(\omega) = f(\omega)g(\omega)$, du maximum $(f \vee g)(\omega) = f(\omega) \vee g(\omega)$ et du minimum $(f \wedge g)(\omega) = f(\omega) \wedge g(\omega)$.

**Preuve:**

La fonction $\omega \mapsto \alpha f(\omega)$ est la composition de la fonction mesurable $f$ et de la fonction continue $x \mapsto \alpha x$. De même, $f+g$ (resp.$fg$, resp.$f \vee g$, resp.$f \wedge g$) est la composée de la fonction mesurable $\omega \mapsto (f(\omega), g(\omega))$ (en vertu de la Proposition 2.36) et de la fonction continue $(x,y) \mapsto x+y$ (resp.$(x,y) \mapsto xy$, resp.$(x,y) \mapsto x \vee y$, resp.$(x,y) \mapsto x \wedge y$). $\square$

**Exercice 2.38.** Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est borélienne si et seulement si on a l'une des conditions équivalentes :

1. Pour tout $a \leq b$, $f^{-1}([a,b]) \in \mathcal{T}$.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y \leq a\}) \in \mathcal{T}$.
3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y \geq a\}) \in \mathcal{T}$.

### 2.3.2 Suites de fonctions mesurables

**Théorème 2.39.** *Soit $(f_n)$ une suite d'applications mesurables d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa tribu borélienne. Si $(f_n)$ converge ponctuellement vers une application $f$ de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $\mathbb{R}^n$ (i.e. pour tout $\omega \in \Omega$, $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$, $f(\omega) \in \mathbb{R}^n$,) alors $f$ est mesurable.*

**Preuve:**

Notons que chaque ouvert dans $\mathbb{R}^n$ est union de boules ouvertes. Donc, la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^n$ est engendrée par les boules ouvertes dans $\mathbb{R}^n$. Il suffit de montrer que si $B$ est une boule ouverte alors $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$. Soit $B$ la boule ouverte centrée dans $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r$. Pour chaque $s \in \mathbb{N}$, $r > \frac{1}{s}$, notons par $B_s$ la boule ouverte centrée dans $a$ et de rayon $r - \frac{1}{s}$. Puisque $\mathcal{T}$ est fermée pour les réunions et les intersections dénombrables, il suffit de montrer que

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{s,m} \bigcap_{n \geq m} f_n^{-1}(B_s).$$

Si $x \in \bigcap_{n\geq m} f_n^{-1}(B_s)$ alors $f_n(x) \in B_s$ pour tous $n \geq m$ qui entraine que $f(x) = \lim f_n(x) \in \overline{B_s} \subset B$. D'où $f^{-1}(B) \supset \bigcup_{s,m} \bigcap_{n\geq m} f_n^{-1}(B_s)$. D'autre part, $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B \Rightarrow \exists s > 1$ tel que $f(x) \in B_s \Rightarrow \exists m$ t.q. $f_n(x) \in B_s$ pour $\forall n > m \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n\geq m} f_n^{-1}(B_s)$. Donc, $f^{-1}(B) \subset \bigcup_{s,m} \bigcap_{n\geq m} f_n^{-1}(B_s)$. $\square$

**Remarque 2.40.** $\mathbb{R}^n$ est un *espace métrique* munie de la distance $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$ où $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$. Le théorème reste vrai (avec la même preuve) si on remplace l'espace métrique $(\mathbb{R}^n, d)$ par un espace métrique quelconque.

**Rappel 2.41.** Si $(a_n)$ est une suite dans $\mathbb{R}$ alors $\lim_n a_n = \infty$ (resp. $\lim_n a_n = -\infty$) si pour chaque $m \in \mathbb{N}$ il existe $n_\circ(m)$ tel que $a_n > m$ (resp. $a_n < -m$) si $n > n_\circ(m)$.

**Corollaire 2.42.** Soit $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions boréliennes et soit $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Supposons que $\lim_n f_n(\omega) = f(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Alors $f$ est aussi borélienne.

**Preuve:**

Pour tous $m, l \in \mathbb{N}^*$ on pose $A_{m,l} \stackrel{def}{=} \bigcap_{n\geq l} f_n^{-1}(\{y > m\})$. Alors $\bigcap_m (\bigcup_l A_{m,l}) = \{x \in \Omega : \lim_n f_n(x) = \infty\}$. Donc, $f^{-1}(\infty)$ est mesurable. De manière analogique on montre que $f^{-1}(-\infty)$ est aussi mesurable. Par Théorème 2.39 utilisé pour les restrictions de $f_n$ et $f$ sur $\Omega \setminus (f^{-1}(\infty) \cup f^{-1}(-\infty))$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Donc, $f$ est messurable. (Voir la Définition 2.32). $\square$

**Exercice 2.43.** Avec les notations et les hypothèses du Corollaire 2.42, montrer que $f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{T}$.

**Proposition 2.44.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions boréliennes. Alors*

1. *les fonctions $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont boréliennes ;*
2. *les fonctions $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ sont boréliennes ;*
3. *la partie $A = \{x \in \Omega : \text{la suite } (f_n(x)) \text{ converge}\}$ est mesurable ;*
4. *si $h : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne alors $\{x \in \Omega : \lim_n f_n(x) = h(x)\}$ est mesurable.*

**Preuve:**

1. La fonction $g_n = f_1 \vee \cdots \vee f_n$ est borélienne en vertu du Corollaire 2.37. On a $g_{n+1} \geq g_n$ et $\sup_n f_n = \lim_n g_n$. D'où, $\sup_n f_n$ est mesurable par Corollaire 2.42. La fonction $\inf_n f_n$ est borélienne parce que $\inf_n f_n = -\sup_n (-f_n)$.

2. Considérons $\liminf$.
La fonction $h_n = \inf_{m \geq n} f_m$ est borélienne en vertu de 1. Mais $\liminf_n f_n = \lim_n h_n = \sup_n h_n$. En utilisant 1, on obtient que $\liminf_n f_n$ est borélienne. La fonction $\limsup f_n$ est borélienne car $\limsup_n f_n = -\liminf_n (-f_n)$.

3. $A$ est mesurable en vertu de 2 parce que $A = \{\omega \in \Omega : \liminf \ f_n(\omega) = \limsup \ f_n(\omega)\}$.

4. Notons $f = \liminf \ f_n$ et $g = \limsup \ f_n$. Alors $\{\omega \in \Omega : \lim_n f_n(\omega) = h(\omega)\} = \{\omega \in \Omega : (f-g)(\omega) = (f-h)(\omega) = 0\}$ est mesurable parce que $f, g$ et $h$ sont des fonctions mesurables. □

### 2.3.3 Fonctions étagées

**Définition 2.45.** Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On appelle fonction étagée (à valeurs dans $\mathbb{R}$) une fonction de la forme $f(\omega) = \sum_{1 \leq i \leq k} a_i \, 1_{A_i}(\omega)$ où $A_i \in \mathcal{T}$ sont d.d.d. et $a_i \in \mathbb{R}$.

**Théorème 2.46.** *Toute fonction borélienne de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $\mathbb{R}$ est limit simple de fonctions étagées. Si $f$ est positive, la limite peut être choisie croissante.*

**Preuve:**

Prenons d'abord $f$ positive. Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, on définit

$$A_{n,k} = \{\omega : \frac{k-1}{2^n} \leq f(\omega) < \frac{k}{2^n}\}.$$

Alors les parties $A_{n,k} \in \mathcal{T}$ et elles sont d.d.d. La suite

$$f_n(\omega) = \sum_{1 \leq k \leq 2^{n^2}} \frac{k-1}{2^n} 1_{A_{n,k}}(\omega)$$

est croissante et converge vers $f(\omega)$.

Si $f$ est quelconque on peut écrire $f = f^+ - f^-$ où $f^+ \stackrel{def}{=} f \vee 0$ et $f^- \stackrel{def}{=} (-f) \vee 0$ et, puis, approximer les fonctions positives $f^+$ et $f^-$ comme ci-dessus. Si $\lim_n f_n^+ = f^+$ et $\lim_n f_n^- = f^-$ alors $f = \lim_n (f_n^+ - f_n^-)$. □

**Corollaire 2.47.** Soit $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction borélienne. Alors $f$ est limit simple de fonctions étagées. Si $f$ est positive, la limite peut être choisie croissante.

**Preuve:**

En utilisant la formule $f = f^+ - f^-$, le cas général se réduit au cas $f \geq 0$. Supposons que $f \geq 0$ et soit $A = f^{-1}(\infty)$. Alors $A \in \mathcal{T}$. Soit $f' = f_{|\Omega \setminus A}$. Alors $f'$ est borélienne à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Soit $(f_n^{'})$ une suite de fonctions étagées positives sur $\Omega \setminus A$ (Théorème 2.46) telle que $\lim_n f_n^{'}(\omega) = f'(\omega)$ pour tous $\omega \in \Omega \setminus A$. Soit

$$f_n(\omega) = \begin{cases} f_n'(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega \setminus A \\ n & \text{si } \omega \in A \end{cases}$$

Alors $f_n$ est étagée et $\lim_n f_n = f$. □

### 2.3.4 Le théorème de classes monotones et le théorème de prolongement

**Rappel 2.48.** Une tribu est une classe monotone.

**Proposition 2.49.** *Une classe monotone $\mathcal{M}$ stable par intersection finie est une tribu.*

**Preuve:**

Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$. Montrons que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$. Supposons que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Alors $A_1^c \supset A_2 \Rightarrow A_1^c \setminus A_2 = (A_1 \cup A_2)^c \in \mathcal{M} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$ . Soit $A_1, A_2 \in \Omega$ quelconques. Par l'hypothèse $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{M}$ et, donc, $A_1 \setminus (A_1 \cap A_2) \in \mathcal{M}$. Mais $A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)$ et $A_2$ sont disjoints et leur réunion est $A_1 \cup A_2$. Par le précédent, $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$. En générale, si $A_i$ est une suite dans $\mathcal{M}$ on obtient par recurrence que $B_n = \bigcup_{1 \le i \le n} A_i \in \mathcal{M}$. Mais $B_n \subset B_{n+1}$ et $\bigcup_n B_n = \bigcup_i A_i$. D'où, $\bigcup_i A_i \in \mathcal{M}$, i.e., $\mathcal{M}$ est une tribu. □

**Théorème 2.50.** ***(des clases monotones)*** *Soit $\mathcal{E}$ une famille de parties de $\Omega$ stable par intersection finie. Alors $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{T}(\mathcal{E})$.*

**Preuve:**

On a $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Pour démontrer l'inclusion inverse, nous montrons que $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ est stable par intersection finie (Proposition 2.49). Soit

$$\mathcal{M}_1 = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) : \forall\, B \in \mathcal{E}, A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\}.$$

Si $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_1$, $A_1 \subset A_2$ et $B \in \mathcal{E}$ alors $(A_2 \setminus A_1) \cap B = (A_2 \cap B) \setminus (A_1 \cap B) \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Donc, $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{M}_1$. Encore, si $(A_n) \in \mathcal{M}_1$, $A_n \subset A_{n+1}$ et $B \in \mathcal{E}$ alors $(\bigcup_n A_n) \cap B = \bigcup_n (A_n \cap B) \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Donc, $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}_1$. Nous avons démontré que $\mathcal{M}_1$ est une classe monotone qui contient $\mathcal{E}$ et est contenue dans $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. D'où, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}(\mathcal{E})$.
Soit

$$\mathcal{M}_2 = \{B \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) : \forall\, C \in \mathcal{M}(\mathcal{E}), B \cap C \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\}.$$

On montre comme ci-dessus que $\mathcal{M}_2$ est une classe monotone. Par le précédent, $\mathcal{M}_2$ contient $\mathcal{E}$ et, par définition, $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Donc, $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Par conséquence, $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ est stable par intersection finie. Proposition 2.49 implique que $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ est une tribu. □

**Corollaire 2.51.** Soient $\mu$ et $\nu$ des mesures sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T})$. Soit $\mathcal{C}$ un clan qui engendre $\mathcal{T}$. Si $\mu$ et $\nu$ coïncident sur $\mathcal{C}$ et sont finies (c.à.d. $\mu(\Omega) = \nu(\Omega) < \infty$) alors elles sont égales.

**Preuve:**

Soit $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{T} : \mu(A) = \nu(A)\}$. Il est facile à voir que $\mathcal{M}$ est une classe monotone contenante $\mathcal{C}$. Donc, $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{T}$. Mais $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie. Par Théorème 2.50, $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \mathcal{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{T}$. D'où, $\mathcal{M} = \mathcal{T}$. □

**Exercice 2.52.** Est-ce que la preuve du Corollaire 2.51 marche pour les mesures infinies ?

La démonstration du théorème suivant est admise.

**Théorème 2.53.** ***(de prolongement)*** *Soit $\mu$ une fonction additive d'ensembles (c.à.d. $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$), positive, définie sur un clan $\mathcal{C}$ de parties de $\Omega$. Si pour toute suite croissante $(A_n)$ d'éléments de $\mathcal{C}$ de réunion $A \in \mathcal{C}$, $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$, alors $\mu$ se prolonge à une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T}(\mathcal{C}))$. Si $\mu$ est $\sigma$-finie sur $\mathcal{C}$ (c.à.d. s'il existe une suite $(B_n)$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $B_n \nearrow \Omega$ et $\mu(B_n) < \infty$ pour tous $n$) alors le prolongement est unique.*

**Exercice 2.54.** En utilisant Corollaire 2.51 démontrer l'unicité de prolongement de $\mu$ dans la formulation du Théorème 2.53.

Théorème 2.53 implique :

**Théorème 2.55.** *Soit $n \geq 1$ un entier. Il existe une unique mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, notée $\lambda_n$ (et appeléé* ***mesure de Lebesque****), telle que :*

$$\lambda_n([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

**Preuve:**

Soit $\mathcal{C}$ le clan engendré par les pavés connexes. Par Corollaire 2.25 la tribu borélienne est engendrée par ce clan. La fonction $\lambda_n$ sur $\mathcal{C}$ est additive en vertu de l'execice 2.3. $\square$

**Remarque 2.56.** Pour $n = 1$ on retrouve la notion de longueur du segment $[a, b]$, pour $n = 2$ celle d'aire du $[a, b] \times [c, d]$, etc.

**Exercice 2.57.** Montrer que $\lambda_n$ est invariante par rapport aux translations.

**Exercice 2.58.** *(Exemple d'un ensemble non-mesurable)* Si $x, y \in [0, 1]$ on écrit $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
   Donc, on peut presenter $[0, 1]$ comme union des classes d'équivalence d.d.d. : $[0, 1] = \bigsqcup_{i \in I} C_i$. Puis, pour chaque $i \in I$ on choisit un élément et un seul $x_i \in C_i$ et on pose $A = \{x_i : i \in I\}$. Posons $A_q = q + A$, $\forall q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$.
2. Montrer que $A_q \cap A_r = \emptyset$ si $q \neq r$.
3. Montrer que $[0, 1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} A_q \subset [-1, 2]$.
4. Soit $\lambda$ la mesure de Lebesque sur $\mathbb{R}$. En supposant $A$ borélien montrer que $\lambda(A_q) = \lambda(A)$.
5. En déduire que $1 \leq \infty \cdot \lambda(A) \leq 3$.
6. Conclure que $A$ ne pourrait pas être borélien.

### 2.3.5 Ensembles négligeables et propriétés vraies $\mu$-presque partout

On se fixe un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

**Définition 2.59.**
1. On dit que $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est *$\mu$-négligeable* s'il existe $B \in \mathcal{T}$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.
2. Une fonction mesurable $f$ vérifie une propriété $P$ *$\mu$-presque partout* (*$\mu$-p.p.*) si l'ensemble $\{x \in \Omega : f(x)$ ne vérifie pas $P\}$ est $\mu$-négligeable.

**Exemple 11.**
1. On considère l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ avec $\Omega = \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = 1$ et $\mu(\{2\}) = 0$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1) = 7$ et $f(2) = 0$. Alors $f$ est constante et égale à 7 $\mu$-p.p.
2. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où $\lambda$ est la mesure de Lebesque. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors $f = 0$ $\lambda$-p.p.
3. Soit $f$ une fonction borélienne sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que $f(0) = 0$, $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. Alors $f$ est continue $\lambda$-p.p.

### 2.3.6 Mesure image

**Définition 2.60.** Soit $f$ une application mesurable d'un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. On appelle **mesure image de $\mu$ par** $f$ la mesure sur $(E, \mathcal{E})$, notée $\mu_f$, définie par

$$\mu_f(B) = \mu(f^{-1}(B)), B \in \mathcal{E}.$$

Si $\mu$ est une probabilité, $\mu_f$ est aussi une probabilité.
La mesure $\mu_f$ permettra de ramener une intégrale sur $\Omega$ à une intégrale sur $E$.

**Exemple 12.** Considérons le jeu de dé avec $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\mu$ probabilité définie par $\mu(A) \stackrel{def}{=} \text{card}(A)/6$. Soit $f : \Omega \to \{0, 1\}$ définie par $f(\omega) = 1$ si $\omega$ est pair, et 0 si $\omega$ est impaire. On voit que

$$\mu_f(\{0\}) = \mu_f(\{1\}) = 1/2,$$

i.e. on a une chance sur deux d'obtenir un chiffre pair en jouant au dé. L'exemple montre que le formalisme utilisé dans la définition de $\mu_f$ coincide avec l'intuition que l'on peut avoir du hazard.

# Chapitre 3

# Integration

## 3.1 Intégrale de fonctions mesurables positives

Dans ce chapitre on considère des fonctions boréliennes d'un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

**Définition 3.1.** Soient $B \in \mathcal{T}$ et $f$ une fonction étagées, positive et borélienne, c.à.d. $f(\omega) = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} a_i 1_{A_i}(\omega)$ où $a_i \geq 0$ et $A_i$ sont des ensembles mesurables d.d.d. *L'intégrale de $f$ sur $B$ par rapport à $\mu$* est défini par

$$\int\limits_B f d\mu = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \mu(A_i \cap B) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \int\limits_B 1_{A_i} d\mu.$$

Si $B = \Omega$ on parle tout simplement *d'intégrale de $f$ par rapport à $\mu$.*

**Exercice 3.2.** La valeur de $\int\limits_B f d\mu$ ne dépend pas de la décomposition de $f$ en somme d'indicatrices (i.e., en somme de $a_i 1_{A_i}$).

**Définition 3.3.** Soit $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$ une fonction borélienne. La définition de son intégrale par rapport à $\mu$ sur l'ensemble mesurable $B$ est donnée par

$$\int\limits_B f d\mu = \int\limits_B f(\omega) d\mu(\omega) = \sup\{\int\limits_B g d\mu : g \text{ étagée positive}, g \leq f\}.$$

Si $B = \Omega$ on écrit $\int f d\mu$ au lieu de $\int\limits_\Omega f d\mu$.

**Proposition 3.4.** *Soient $f$ et $g$ des fonctions boréliennes positives et $A, B \in \mathcal{T}$.*

1. $f \leq g \Rightarrow 0 \leq \int\limits_B f d\mu \leq \int\limits_B g d\mu$ ;
2. $A \subset B \Rightarrow \int\limits_A f d\mu \leq \int\limits_B f d\mu$ ;
3. $c \geq 0 \Rightarrow \int\limits_B c f d\mu = c \int\limits_B f d\mu$ ;
4. $f = 0 \Rightarrow \int f d\mu = 0$ ;
5. $\int\limits_B f d\mu = \int 1_B f d\mu$ ;
6. $\int\limits_B f d\mu = 0 \Rightarrow 1_B f = 0 \ \mu - p.p.$

**Preuve:**

Idée de la preuve de $1-5$ : d'abord on montre la proposition pour les fonctions étagées positives et puis on passe au supremum pour les fonctions mesurables positives.

Montrons 6. Soit $C = \{x \in B : f(x) > 0\}$. Il faut prouver que $\mu(C) = 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ soit $C_n = \{x \in B : f(x) > \frac{1}{n}\}$. Alors $\frac{1}{n} \cdot 1_{C_n} \leq f$. Donc, $\int \frac{1}{n} \cdot 1_{C_n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(C_n) \leq \int f d\mu = 0 \Rightarrow \mu(C_n) = 0$. Mais $C_n \nearrow C$. D'où $\mu(C) = 0$. $\square$

**Exercice 3.5.**

1. Montrer les parties $1-5$ de la proposition ci-dessus.
2. Montrer que la proposition reste vraie si les hypothèses sur $f$ et $g$ ont lieu $\mu$-presque partout. (Indication : D'abord, on peut démontrer que si $\mu(B)=0$ alors $\int_B f d\mu = 0$ pour toute fonction positive.)

## 3.2 Intégrale de fonctions mesurables et les théorèmes de convergence

**Théorème 3.6.** ***(convergence monotone)*** *Soit $(f_n)$ une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeante ponctuellement vers $f$. Alors $f$ est mesurable et*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

**Preuve:**

Par Théorème 2.39 la fonction $f$ est mesurable. En vertu de la Proposition 3.4(1) la suite $\int f_n d\mu$ est positive, croissante et, donc, converge vers un $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}^+$. Puisque $f_n \leq f$, $\alpha \leq \int f d\mu$. Soit $g$ une fonction positive, étagée, et telle que $f \geq g$. Fixons un $0 < c < 1$. Soit $A_n = \{x \in \Omega : f_n(x) \geq c \cdot g(x)\}$. Alors $A_n \nearrow \Omega$ et

$$\int_{A_n} f_n d\mu + \int_{A_n^c} cg d\mu \geq c \int g d\mu. \tag{3.1}$$

Il existe $m > 0$ tel que $cg(x) \leq m$ pour tout $x$. Par conséquence, $\int_{A_n^c} cg d\mu \leq m\mu(A_n^c)$. Mais $A_n^c \searrow \emptyset$. Donc, $\mu(A_n^c) \to 0$, entraînant que $\int_{A_n^c} cg d\mu \to 0$. Par la définition de $\alpha$ et la Proposition 3.4(2) $\alpha \geq \int_{A_n} f_n d\mu$. En passant vers la limite dans (3.1) on obtient

$$\alpha \geq c \int g d\mu.$$

Par la définition de $\int f d\mu$, $\alpha \geq c \int f d\mu$ pour tout $0 < c < 1$. D'où $\alpha \geq \int f d\mu$, i.e. $\alpha = \int f d\mu$. □

**Corollaire 3.7.** Soit $(f_n)$ une suite de fonctions mesurables positives et soit $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Alors

$$\int f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu.$$

**Preuve:**

On applique Théorème 3.6 pour la suite $g_n = \sum_{0\leq m\leq n} f_n$ qui est croissante et converge vers $f$. □

**Théorème 3.8.** ***(lemme de Fatou)*** *Soit $(f_n)$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

**Preuve:**

Soit $g_n = \inf_{m\geq n} f_m$. Alors chaque $g_n$ est mesurable (voir Proposition 2.44), la suite $(g_n)$ est croissante et $\lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$ est mesurable aussi (Proposition 2.44). Par Théorème 3.6, $\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$. Mais, $g_n \leq f_m$ pour tous $m \geq n$. Donc $\int g_n d\mu \leq \inf_{m\geq n} \int f_m d\mu$. D'où

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} \int f_m d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

□

**Rappel 3.9.** $f = f^+ - f^-$ où $f^+ = f \vee 0$ et $f^- = (-f) \vee 0 = -(f \wedge 0)$.

**Définition 3.10.** Soit $f$ une fonction mesurable et $B \in \mathcal{T}$. On dit que $f$ est *$\mu$-intégrable sur $B$* (ou brièvement *intégrable sur $B$* si $\mu$ est implicite) si $\int\limits_B |f| d\mu < \infty$. Si $f$ est $\mu$-intégrable sur $B$ alors $\int\limits_B f d\mu \overset{def}{=} \int\limits_B f^+ d\mu - \int\limits_B f^- d\mu$ est son intégrale par rapport à $\mu$ sur $B$.

Si $B = \Omega$, on dit que $f$ est *$\mu$-intégrable* et note souvent $\int f d\mu$ au lieu de $\int\limits_\Omega f d\mu$.

**Proposition 3.11.** *Soit $f$ et $g$ intégrables et $B \in \mathcal{T}$.*

*1. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors*

$$\int\limits_B (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\limits_B f d\mu + \beta \int\limits_B g d\mu.$$

*2. Si $f \leq g$ alors*

$$\int\limits_B f d\mu \leq \int\limits_B g d\mu.$$

**Preuve:**

La preuve est la même si $B = \Omega$. Pour montrer 1, supposons d'abord que $f, g \geq 0$ et que $\alpha, \beta \geq 0$. D'après Théorème 2.46 $f = \lim\limits_n f_n$ et $g = \lim\limits_n g_n$ où $(f_n)$ et $(g_n)$ sont des suites croissantes de fonctions étagées et positives. Alors la suite $(\alpha f_n + \beta g_n)$ converge en croissant vers $\alpha f + \beta g$ et le resultat se déduit du théorème de convergence monotone (Théorème 3.6) et la Proposition 3.4. En général, on utilise les présentations $f = f^+ - f^-$ et $f = g^+ - g^-$ en observant que $af^+ = -(af)^-$ et $af^- = -(af)^+$ si $a < 0$.

Si $f \geq g$ alors $f - g \geq 0$ et $\int (f-g) d\mu \geq 0$ d'après Proposition 3.4(1). Maintenant, il suffit d'appliquer la linéarité. □

**Exercice 3.12.** Montrer la Proposition 3.11 pour $f, g, \alpha$ et $\beta$ quelconques.

Le lemme de Fatou implique :

**Corollaire 3.13.** Soit $g$ une fonction intégrable et soit $(f_n)$ une suite de fonctions intégrables.

1. Si $g \leq f_n$ alors $\int \liminf\limits_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu$.
2. Si $f_n \leq g$ alors $\limsup\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int \limsup\limits_{n\to\infty} f_n d\mu$.

**Preuve:**

1. D'après le lemme de Fatou (Théorème 3.8), on a

$$\int \liminf_{n\to\infty} (f_n - g) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (f_n - g) d\mu.$$

Pour conclure, il suffit d'ajouter $\int g d\mu$ de deux cotés d'inégalité ci-dessus, d'utiliser la définition de lim inf et d'appliquer la Proposition 3.11.

2. Par le lemme de Fatou

$$\int \liminf_{n\to\infty} (g - f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g - f_n) d\mu.$$

Pour completer la preuve on utilise que $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n) = -\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n)$ pout chaque suite $(a_n)$. □

**Théorème 3.14.** ***(de convergence dominée de Lebesque)*** *Soit $(f_n)$ une suite de fonctions mesurables telle que $|f_n| \leq g$ où $g$ est intégrable et $f_n$ converge vers $f$. Alors $f$ est intégrable et*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

**Preuve:**

La fonction $f$ est mesurable en vertu du Théorème 2.39 et elle est intégrable parce que $|f| \leq g$ et $g$ est intégrable. Notons que $-g \leq f \leq g$. Par Corollaire 3.13 et l'hypothèse $\lim_n f_n = f$, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu = \int f d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

D'où,

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

□

**Exercice 3.15.** Soit $f = 1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. Alors $f$ est Lebesque intégrable et $\int f d\mu = 0$ mais $f$ n'est pas Riemann intégrable.

### 3.2.1 Intégrales de Riemann et Lebesgue

Dans ce section $a < b$, $I = [a, b]$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $f$ est bornée, i.e. il existe $C > 0$ tel que $-C < f(x) < C$ pour tous $x \in I$.

Soit $\sigma$ *une division de* $I$, i.e. $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$. Alors $\delta(\sigma) \overset{def}{=} \max\{x_i - x_{i-1},\ i \geq 1\}$ est *le pas de* $\sigma$. On pose $m_i = \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)$ et $M_i = \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)$. Rappelons que

$$S^-(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

est la somme inférieure de Darboux associée à $\sigma$ et

$$S^+(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

est la somme supérieure de Darboux associée à $\sigma$. Il est evident que $S^-(f, \sigma) \leq S^+(f, \sigma)$. Introduisons les fonctions étagées suivantes :

$$f_\sigma^-(x) = \begin{cases} m_1 & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ m_i & \text{si } x \in (x_{i-1}, x_i] \text{ et } 2 \leq i \leq n, \end{cases}$$

et

$$f_\sigma^+(x) = \begin{cases} M_1 & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ M_i & \text{si } x \in (x_{i-1}, x_i] \text{ et } 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Alors

$$\int_I f_\sigma^- d\lambda = S^-(f, \sigma) \text{ et } \int_I f_\sigma^+ d\lambda = S^+(f, \sigma), \tag{3.2}$$

où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue.

On dit que la division $\sigma' = (a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b)$ est plus petite que la division $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$, on note $\sigma' \leq \sigma$, si $\{y_0, y_1, \cdots, y_m\} \supset \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$. Si $(\sigma_k)$ est une suite de divisions de $I$ alors $\sigma_k \to 0$ si $\sigma_k \geq \sigma_{k+1}$ pour tous $k$ et $\lim_n \delta(\sigma_k) = 0$. Etant donnée une telle suite on pose $f_i^- = f_{\sigma_i}^-$ et $f_i^+ = f_{\sigma_i}^+$. Alors $f_k^- \leq f_{k+1}^- \leq f \leq f_{k+1}^+ \leq f_k^+$. Soit $\lim_k f_k^- = f^-$ et $\lim_k f_k^+ = f^+$. Les fonctions $f^-$ et $f^+$ sont boréliennes, intégrables sur $I$, $f^- \leq f \leq f^+$ et

$$\int_I f^- d\lambda = \lim_k \int_I f_k^- d\lambda \leq \lim_k \int_I f_k^+ d\lambda = \int_I f^+ d\lambda. \tag{3.3}$$

Rappelons la définition de l'intégrale de Reimann.

**Définition 3.16.** On dit que la fonction $f$ est *intégrable au sens de Riemann (ou Riemann intégrable)* s'il existe une suite de divisions $(\sigma_k)$ telle que $\sigma_k \to 0$ et $\lim_{k\to\infty} S^-(f, \sigma_k) = \lim_{k\to\infty} S^+(f, \sigma_k)$. Dans ce cas $\lim_{k\to\infty} S^\pm(f, \sigma_k)$ est noté par $\int_a^b f(x)dx$ est appelé intégrale de Riemann.

Desormais on suppose que $f$ est Riemann intégrable et $(\sigma_k)$ est comme dans la définition ci-dessus. D'après (3.2) et (3.3), on obtient

$$\int_I f^- d\lambda = \int_a^b f(x)dx = \int_I f^+ d\lambda.$$

Soit $A = \{x \in I : f^+(x) = f(x) = f^-(x)\}$. On a $f^+ - f^- \geq 0$ et $\int_I (f^+ - f^-)d\lambda = 0$. Donc,

$$\lambda(A) = \lambda(I) = b - a.$$

On peut montrer que chaque $\alpha \in A$ est un point de continuité pour $f$, c.à.d. si $(\alpha_i)$ est une suite dans $I$ convergeante vers $\alpha$ alors $(f(\alpha_i))$ converge vers $f(\alpha)$. En effet, supposons par l'absurd que $(f(\alpha_i))$ ne converge pas vers $f(\alpha)$. En remplaçant $(\alpha_i)$ par sa sous-suite on peut supposer que $(f(\alpha_i))$ converge vers $\beta \neq f(\alpha)$ et que soit $\alpha_i < \alpha$ pour tous $i$ soit $\alpha_i > \alpha$ pour tous $i$. Supposons que $\alpha_i < \alpha$ pour tous $i$ et $\beta < f(\alpha)$. (Les cas restants se traitent de manière analogique.) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\beta < f(\alpha) - \varepsilon$. Pour chaque $k$ ils existent deux points voisins $p_k$ et $q_k$ de la division $\sigma_k$ tels que $p_k < \alpha \leq q_k$. Donc, il existe $n_0$ tel que $p_k < \alpha_n < \alpha \leq q_k$ pour tous $n > n_0$. D'où, $f_k^-(\alpha) = f_k^-(\alpha_n) \leq \inf f(\alpha_n) = \beta < f(\alpha) - \varepsilon$ si $n > n_0$. On obtient que $\lim_k f_k^-(\alpha) = f^-(\alpha) \leq f(\alpha) - \varepsilon$. Absurd.

On a démontré le théorème suivant.

**Théorème 3.17.** *Soit $f$ Riemann intégrable. Alors $f$ est continue $\lambda$-p.p. et il existe une fonction borélienne intégrable $g$ sur $I$ telle que $f = g$ $\lambda$-p.p. et* $\int_a^b f(x)dx = \int_I g d\lambda$.

# Chapitre 4

# Espaces métriques

## 4.1 Distances

La notion de *distance* a été introduite pour formaliser les propriétés d'une façon de mesurer l'écart entre des éléments d'un même ensemble ; ces propriétés sont modelées sur celles de la longueur d'un vecteur dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

**Définition 4.1.** Soit $X$ un ensemble. Une *distance* sur $X$ est une fonction $d\colon X \times X \to [0, +\infty[$ satisfaisant les propriétés suivantes :

1. $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$.
3. $\forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

On dit alors que $(X, d)$ est un *espace métrique*.

La première des trois propriétés ci-dessus est appelée *axiome de séparation* : elle dit en particulier que deux points distincts sont nécessairement à distance strictement positive. La deuxième propriété est l'*axiome de symétrie*. Enfin, la troisième est appelée *inégalité triangulaire*. C'est peut-être la moins intuitive ; dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa notion usuelle de distance, elle correspond au fait que la longueur d'un côté d'un triangle est toujours inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

**Propriété 4.2.** Dans un espace métrique $(X, d)$, pour tout $x, y, z \in X$, on a $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$. (Preuve en exercice.)

L'exemple le plus important d'espace métrique est $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$ ; plus généralement, presque toutes les distances que nous rencontrerons proviennent d'une *norme*, dont nous rappelons la définition maintenant.

**Définition 4.3.** Soit $X$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$). Une *norme* sur $X$ est une fonction $\|\cdot\|\colon X \to [0, +\infty[$ satisfaisant les conditions suivantes :

1. $\forall x \in X \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\in \mathbb{C}$) $\forall x \in X \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

On dit alors que $(X, \|\cdot\|)$ est un *espace normé*.

**Exemple 13.** La norme associée au produit scalaire d'un espace euclidien, appelée norme euclidienne.

**Exemple 14.** Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ et } \|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Les fonctions $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$. (Preuve en exercice.)

**Propriété 4.4.** Si $(X, \|\cdot\|)$ est un espace normé, alors la fonction $d\colon X \times X \to [0, +\infty[$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur $X$. (Preuve en exercice.)

On dira que $d$ définie comme ci-dessus est la distance induite par $\|\cdot\|$. Ce sont les distances avec lesquelles nous travaillerons principalement ; l'ensemble $X$ ne sera pas forcément un espace vectoriel tout entier, c'est pourquoi la remarque suivante sera importante : si $(X, d)$ un espace métrique, et $A \subseteq X$, alors la restriction de $d$ à $A$ munit $A$ d'une structure d'espace métrique.

**Exercice 4.5.** Soit $X$ un ensemble. On définit une fonction $d\colon X \times X \to [0, +\infty[$ en posant

$$\forall x, y \in X \quad d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Montrer que $d$ est une distance sur $X$, appelée *distance discrète*.

**Définition 4.6.** Soit $(X, d)$ un espace métrique, $x \in X$ et $r \geq 0$. On définit :

— La *boule ouverte* de centre $x$ et de rayon $r$ par

$$B(x, r) = \{y \in X \colon d(x, y) < r\}.$$

— La *boule fermée* de centre $x$ et de rayon $r$ par

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X \colon d(x, y) \leq r\}.$$

Montrer que pour $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, $B(x, r) = ]x - r, x + r[$ et $\overline{B}(x, r) = [x - r, x + r]$.

**Exercice 4.7.** Représenter les boules ouvertes/fermées dans $\mathbb{R}^2$ pour les distances associées aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de centre $(1, 0)$ et de rayon 1. (Rappelons que $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ où $x = (x_1, x_2)$.)

**Exercice 4.8.** Déterminer les boules ouvertes et les boules fermées d'un ensemble $X$ muni de la distance discrète.

**Proposition 4.9.** *Soit $(X, d_X)$ et $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques. Alors $d_1$ et $d_\infty$ définies pour $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ dans $X \times Y$ par*

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2) \qquad \textit{et}$$

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

*sont des distances sur $X \times Y$. On appellera $d_\infty$ la* distance produit *de $d_X$ et $d_Y$.*

**Preuve:**

Les applications $d_1$ et $d_\infty$ sont à valeurs dans $[0, +\infty[$ et satisfont de manière évidente les deux premières propriétés (axiome de séparation et axiome de symétrie).
Vérifions l'inégalité triangulaire : soit $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ et $(x_3, y_3)$ dans $X \times Y$. Alors,

$$\begin{aligned} d_1((x_1, y_1), (x_3, y_3)) = d_X(x_1, x_3) + d_Y(y_1, y_3) &\leq d_X(x_1, x_2) + d_X(x_2, x_3) + d_Y(y_1, y_2) + d_Y(y_1, y_3) \\ &= d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d_1((x_2, y_2), (x_3, y_3)). \end{aligned}$$

On a

$$d_X(x_1, x_3) \leq d_X(x_1, x_2) + d_X(x_2, x_3) \leq \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)) + \max(d_X(x_2, x_3), d_Y(y_2, y_3)) ,$$

d'où

$$d_X(x_1, x_3) \leq d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d_\infty((x_2, y_2), (x_3, y_3)).$$

De même,

$$d_Y(y_1, y_3) \leq d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d_\infty((x_2, y_2), (x_3, y_3)) .$$

Ainsi,

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_3, y_3)) = \max(d_X(x_1, x_3), d_Y(y_1, y_3)) \leq d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d_\infty((x_2, y_2), (x_3, y_3)) .$$

## 4.2 Suites dans un espace métrique

L'intérêt principal de la notion de distance, pour nous, est de pouvoir formaliser la notion de suites convergentes : une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $x$ si et seulement si la distance $d(x_n, x)$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini. Avec des quantificateurs, on obtient la définition suivante.

**Définition 4.10.** Soit $(X, d)$ un espace métrique, $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $X$ et $x \in X$. On dit que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $x$ si :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ d(x_n, x) \leq \varepsilon \ ,$$

c'est-à-dire si :

$$d(x_n, x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

**Propriété 4.11.** Soit $(X, d)$ un espace métrique et $(x_n)$ une suite d'éléments de $X$, qui converge à la fois vers $x$ et $x'$. Alors $x = x'$, autrement dit, la limite d'une suite convergente est unique. (Preuve en exercice.)

**Proposition 4.12.** *Soit $(X, d_X)$ et $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques. On munit $X \times Y$ de la distance produit $d_\infty$ définie à la Proposition 4.9. Alors une suite $(x_n, y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $X \times Y$ converge vers $(x, y)$ si, et seulement si, $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $x$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers $y$.* (Preuve en exercice.)

Ce résultat reste vrai si on remplace $d_\infty$ par $d_1$. (Preuve en exercice.)

Ainsi, dans $\mathbb{R}^n$ muni de la distance induite par $\|\cdot\|_\infty$, on retrouve le fait qu'une suite est convergente si et seulement si chaque suite de coordonnées converge.

A priori, la notion de convergence dépend de la distance considérée sur $X$ ; mais il arrive que des distances différentes aient les mêmes suites convergentes.

**Définition 4.13.** Soit $X$ un espace vectoriel, et $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ deux normes sur $X$. On dit que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont *équivalentes* s'il existe des constantes $m, M$ strictement positives et telles que :

$$\forall x \in X \quad m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \ .$$

**Exercice 4.14.** Montrer que la norme $\|\cdot\|_\infty$ et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

On reverra plus tard le théorème, normalement déjà connu et qu'il est en tout cas sans doute utile d'avoir en tête, selon lequel toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Cette définition a un analogue pour les distances :

**Définition 4.15.** Soit $X$ un ensemble. Deux distances $d_1, d_2$ sur $X$ sont dites *équivalentes* s'il existe des constantes $m, M$ strictement positives et telles que :

$$\forall x, y \in X \quad md_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Md_1(x, y) \ .$$

Bien sûr, si $d_1, d_2$ sont les distances associées à des normes équivalentes, alors elles sont elles-mêmes équivalentes. Cette définition est importante pour nous à cause de la propriété suivante.

**Proposition 4.16.** *Soit $X$ un ensemble et $d_1, d_2$ deux distances sur $X$. Si $d_1$ et $d_2$ sont équivalentes, alors une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge dans $(X, d_1)$ si et seulement si elle converge dans $(X, d_2)$.*

Autrement dit : deux distances équivalentes ont les mêmes suites convergentes.

**Preuve:**

Soit deux constantes $m, M$ strictement positives telles que :

$$\forall x, y \in X \quad md_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Md_1(x, y) \ .$$

Soit $(x_n)$ une suite et $x$ un élément de $X$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$md_1(x_n, x) \leq d_2(x_n, x) \leq Md_1(x_n, y) \ ,$$

ce qui entraîne que :

$$d_1(x_n, x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ si et seulement si } d_2(x_n, x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

**Définition 4.17.** Soit $X$ un ensemble, et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $X$. Une *suite extraite* de $(x_n)_{n\geq 0}$ est une *sous-suite* de la forme $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ où $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite strictement croissante d'entiers, ou, de manière équivalente, de la forme $(x_{\varphi(k)})_{k\geq 0}$, où $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction *strictement croissante* (il suffit de poser pour $k \geq 0$, $\varphi(k) = n_k$).

Intuitivement : une suite extraite est obtenue en ne gardant que certains termes de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ et en oubliant les autres ; par exemple, la suite $(x_{2k})_{k\geq 0}$ est une suite extraite de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.

**Propriété 4.18.** Soit $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(k) \geq k$ (et en particulier $\varphi(k)$ tend vers $+\infty$ !). (Preuve en exercice.)

**Proposition 4.19.** *Soit $(X, d)$ un espace métrique. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergente alors toute suite extraite $(x_{\varphi(k)})_{k\geq 0}$ est convergente.* (Preuve en exercice.)

**Exercice 4.20.** Soit $(X, d)$ un espace métrique et $(x_n)$ une suite d'éléments de $X$.

Supposons d'abord que les suites $(x_{2k})$ et $(x_{2k+1})$ convergent vers la même limite. Montrer que $(x_n)$ est convergente. Ce résultat reste-t-il vrai si l'on ne suppose pas que les limites de $(x_{2k})$ et $(x_{2k+1})$ sont égales ?

Montrer que si $(x_{2k})$, $(x_{2k+1})$ et $(x_{3k})$ sont toutes les trois convergentes alors $(x_n)$ est convergente.

**Proposition 4.21.** *Toute suite de réels admet une sous-suite monotone.*

**Preuve:**

Soit $(x_n)$ une suite de réels. Pour cette preuve, on dira qu'un entier $n$ est un pic, si pour tout $m > n$, $x_n > x_m$. S'il y a une infinité de pics $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, alors la suite extraite $(x_{n_k})$ est strictement décroissante.

Sinon, il existe un entier $N$ tel qu'aucun entier $n \geq N$ n'est un pic. On construit alors par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)$ tel que la sous-suite $(x_{n_k})$ soit croissante : pour l'initialisation, on pose $n_0 = N$. Supposons que l'on a choisit $N = n_0 < n_1 < \ldots < n_k$, tel que $x_{n_0} \leq \ldots \leq x_{n_k}$ (condition vide si $k = 0$). Comme $n_k \geq N$, $n_k$ n'est pas un pic et par conséquent il existe $n_{k+1} > n_k$ tel que $x_{n_k} \leq x_{n_{k+1}}$.

## 4.3 Ouverts et fermés

Si on est intéressé plus par la notion de "proximité" induite par une distance que par les valeurs exactes de la distance, on est amené à la notion d'ouvert : $A \subseteq X$ est ouvert ssi, dès que $a \in A$, tout point suffisamment proche de $a$ appartient à $A$. Autrement dit, $A$ contient une petite boule non vide autour de chacun des ses points.

**Définition 4.22.** Soit $(X, d)$ un espace métrique. Une partie $A$ de $X$ est un *ouvert* si

$$\forall a \in A\ \exists r > 0\ B(a, r) \subseteq A.$$

Une boule ouverte est bien un ouvert ! L'ensemble $X$ tout entier et l'ensemble vide $\emptyset$ sont des ouverts. Dans $\mathbb{R}$, muni de la distance usuelle, tout intervalle ouvert est un ouvert (intervalles de la forme $]a, b[$, $]-\infty, a[$, $]b, +\infty[$ et $]-\infty, +\infty[$, avec $a, b \in \mathbb{R}$).

**Exercice 4.23.** Vérifier qu'une partie $A$ d'un espace métrique est un ouvert si et seulement si

$$\forall a \in A\ \exists n \in \mathbb{N}^*\ \overline{B}(a, 1/n) \subseteq A.$$

**Exercice 4.24.** Vérifier qu'une partie $A$ d'un espace métrique est un ouvert si et seulement si

$$\forall a \in A\ \exists r > 0\ \overline{B}(a, r) \subseteq A.$$

La notion d'ouvert dépend de la distance sur $X$ ; par contre pour deux distances équivalentes les ouverts sont les mêmes.

**Exercice 4.25.**

1. Donner un exemple de deux distances sur $\mathbb{R}$ qui ne définissent pas les mêmes ouverts.
2. Soit $X$ un ensemble et $d_1, d_2$ deux distances équivalentes sur $X$. Montrer qu'une partie $A$ de $X$ est un ouvert de $(X, d_1)$ si et seulement si elle est un ouvert de $(X, d_2)$.

**Théorème 4.26.** *Soit $A$ une partie d'un espace métrique $(X,d)$. Alors, $A$ est un ouvert si et seulement pour toute suite $(x_n)$ d'éléments de $X$ qui converge vers un élément de $A$, alors $x_n$ appartient à $A$ pour tout $n$ suffisamment grand.*

**Preuve:**

Supposons $A$ ouvert et considérons une suite $(x_n)$ d'éléments de $X$ qui converge vers $a \in A$. Comme $A$ est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subseteq A$. La convergence de la suite vers $a$, entraîne qu'il existe un entier $N$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_n, a) < r$, c'est-à-dire tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in B(a,r) \subseteq A$.

Réciproquement, si $A$ n'est pas ouvert, il existe $a \in A$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B(a, \frac{1}{n+1}) \not\subset A$. On choisit ainsi pour tout $n$, un élément $x_n \in B(a, \frac{1}{n+1}) \setminus A$. Alors aucun élément de la suite $x_n$ n'appartient à $A$ mais elle converge vers $a$ qui appartient à $A$.

**Définition 4.27.** Une partie $A$ d'un espace métrique est un *fermé* si son complémentaire $X \setminus A$ est ouvert.

Une boule fermée est bien un fermé ! L'ensemble $X$ tout entier et l'ensemble vide sont des fermés. Dans $\mathbb{R}$, muni de la distance usuelle, tout intervalle fermé est un fermé.

Les fermés sont caractérisés par la propriété suivante : la limite de toute suite convergente d'éléments d'un fermé est dans ce fermé. Notons que toute propriété des ouverts se traduit, par passage au complémentaire, en une propriété des fermés.

**Proposition 4.28.** *Soit $A$ une partie d'un espace métrique $(X,d)$. Alors, $A$ est un fermé si et seulement pour toute suite $(x_n)$ d'éléments de $A$ qui converge vers un élément $x$ de $X$, alors $x$ appartient à $A$.*

**Preuve:**

Supposons $A$ fermé. Soit $(x_n)$ une suite d'éléments de $A$ qui converge vers un élément $x$. Comme aucun $x_n$ n'est dans l'ouvert $X \setminus A$, (encore moins pour tout $n$ suffisamment grand), d'après le théorème 4.26, $x$ ne peut appartenir à l'ouvert $X \setminus A$ et donc appartient à $A$.

Réciproquement, si $A$ n'est pas fermé, c'est-à-dire si $X \setminus A$ n'est pas ouvert, alors le théorème 4.26 garantit l'existence d'une suite $(x_n)$ d'éléments n'appartenant pas à $X \setminus A$, c'est-à-dire appartenant à $A$, qui converge vers un élément de $X \setminus A$.

**Proposition 4.29.** *Dans un espace métrique $(X,d)$ donné,*

1. *si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts, alors $\bigcup_{i \in I} O_i$ est également un ouvert*
   *(une* **union quelconque** *d'ouverts est un ouvert) ;*
2. *si $O_1, \ldots, O_n$ sont des ouverts, alors $O_1 \cap \ldots \cap O_n$ est également un ouvert*
   *(une* **intersection finie** *d'ouverts est un ouvert) ;*
3. *si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés, alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est également un fermé*
   *(une* **intersection quelconque** *de fermés est un fermé) ;*
4. *si $F_1, \ldots, F_n$ sont des fermés, alors $F_1 \cup \ldots \cup F_n$ est également un fermé*
   *(une* **union finie** *de fermés est un fermé).*

**Preuve:**

(1) Soit $a \in \bigcup_{i \in I} O_i$, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $a \in O_{i_0}$. Comme $O_{i_0}$ est ouvert, il existe $r > 0$, tel que $B(a,r) \subseteq O_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$, ce qui permet de conclure.

(2) Soit $a \in O_1 \cap \ldots \cap O_n$, alors pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $a \in O_i$ qui est un ouvert. Ainsi, pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $r_i > 0$ tel que $B(a, r_i) \subseteq O_i$. En posant $r = \min(r_1, \ldots, r_n)$, on en déduit que la boule ouverte $B(a,r)$ est incluse dans chacun des $O_i$ et donc que $B(a,r) \subseteq O_1 \cap \ldots \cap O_n$, ce qui permet de conclure.

(3) On a $X \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i)$, qui est ouvert par (1). Ainsi, $\bigcap_{i \in I} F_i$ est fermé.

(4) On a $X \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_n) = (X \setminus F_1) \cap \ldots \cap (X \setminus F_n)$, qui est ouvert par (2), et donc $F_1 \cup \ldots \cup F_n$ est fermé.

**Exercice 4.30.** 1. Donner un exemple d'une intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert.

2. Donner un exemple d'une union de fermés qui n'est pas un fermé.

**Définition 4.31.** Étant donné un espace métrique $(X, d)$, et une partie $A \subseteq X$, l'*intérieur* de $A$, dénoté $\mathring{A}$, est la réunion de tous les ouverts contenus dans $A$, c'est-à-dire

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{O \text{ ouvert} \\ O \subseteq A}} O.$$

Par définition, $\mathring{A}$ est un ouvert, est contenu dans $A$, et il contient tous les autres ouverts contenus dans $A$ : c'est le plus grand ouvert contenu dans $A$. Attention, $\mathring{A}$ peut tout à fait être vide même si $A$ ne l'est pas !

**Propriété 4.32.** Soit $A$ une partie d'un espace métrique $(X, d)$. Alors pour tout $x \in X$, on a

$$x \in \mathring{A} \iff \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subseteq A.$$

(Preuve en exercice.)

**Définition 4.33.** Étant donné un espace métrique $(X, d)$, et une partie $A \subseteq X$, l'*adhérence* de $A$, notée $\overline{A}$, est l'intersection de tous les fermés contenant $A$, c'est-à-dire

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ F \supseteq A}} F.$$

Cette fois, $\overline{A}$ est un fermé, contient $A$, et est contenu dans tous les autres fermés qui contiennent $A$ : c'est le plus petit de tous les fermés contenant $A$.

**Propriété 4.34.** Soit $(X, d)$ un espace métrique, et $A \subseteq X$. On a $\overline{X \setminus A} = X \setminus \mathring{A}$ et $\overbrace{X \setminus A}^{\circ} = X \setminus \overline{A}$. (Preuve en exercice.)

**Propriété 4.35.** Soit $(X, d)$ un espace métrique, $A \subseteq X$ et $x \in X$. Il existe une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $x$ si, et seulement si, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$. (Preuve en exercice.)

Ceci nous permet d'établir la caractérisation suivante de l'adhérence, qui est fondamentale.

**Proposition 4.36.** *Soit $(X, d)$ un espace métrique, $A$ une partie de $X$ et $x \in X$. Alors $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $x$.*

**Preuve:**

Supposons qu'il existe une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $x \in X$. Alors, pour tout fermé $F$ contenant $A$, il existe aussi une suite (la même !) d'éléments de $F$ qui converge vers $x$ ; par conséquent, $x$ appartient à $F$. Donc $x$ appartient à tous les fermés qui contiennent $A$ : $x \in \overline{A}$.
Réciproquement, supposons qu'il n'existe pas de suite d'éléments de $A$ qui converge vers $x \in X$. Alors, d'après la propriété 4.35, il doit exister $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Autrement dit, $X \setminus B(x, r)$ est un fermé de $X$, contenant $A$, mais auquel $x$ n'appartient pas : $x \notin \overline{A}$.

**Exercice 4.37.** Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\mathbb{Q}, [0, 1] \cap \mathbb{Q}, ]0, 1[ \cap \mathbb{Q}$ (dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle).

**Proposition 4.38.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé (on considère $E$ muni de la distance induite par sa norme). Soit $a \in E$ et $r > 0$.*

1. *L'intérieur de la boule fermée $\overline{B}(a, r)$ est la boule ouverte $B(a, r)$.*
2. *L'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$ est la boule fermée $\overline{B}(a, r)$ .*

(Preuve en exercice.)

**Exercice 4.39.** Les deux propriétés de la proposition ci-dessus sont elles vraies pour tout espace métrique ?

**Définition 4.40.** Soit $(X, d)$ un espace métrique, et $A \subseteq X$. On dit que $A$ est *dense* dans $X$ si $\overline{A} = X$.

Par exemple, il est bien connu que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont tous les deux denses dans $\mathbb{R}$.

# Chapitre 5

# Fonctions continues entre espaces métriques

## 5.1 Fonctions continues et uniformément continues

Maintenant qu'on sait ce qu'est une distance, on peut définir la continuité pour des fonctions entre espaces métriques, plutôt que de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ; c'est essentiellement la même chose, en remplaçant $|x-y|$ (qui n'a apriori pas de sens dans un espace métrique) par $d(x,y)$.

**Définition 5.1.** Soit $(X,d)$ et $(Y,D)$ deux espaces métriques, $f\colon X\to Y$ et $x\in X$. On dit que $f$ est *continue en $x$* si :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x'\in X\ d(x,x')<\delta\Rightarrow D(f(x),f(x'))<\varepsilon\ .$$

On dit que $f$ est *continue sur $X$* si elle est continue en $x$ pour tout $x\in X$, autrement dit :

$$\forall x\in X\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x'\in X\ d(x,x')<\delta\Rightarrow D(f(x),f(x'))<\varepsilon\ .$$

Ou encore (l'ordre dans lequel on écrit les deux $\forall$ ne change pas le sens de l'énoncé) :

$$\forall\varepsilon>0\ \forall x\in X\ \exists\delta>0\ \forall x'\in X\ d(x,x')<\delta\Rightarrow D(f(x),f(x'))<\varepsilon\ .$$

Il faut bien comprendre que, ci-dessus, $\delta$ dépend de $\varepsilon$ *et du point $x$ où l'on se place*. Une définition plus forte imposerait que le même $\delta$ fonctionne pour tous les $x\in X$ simultanément ; dans ce cas, on dit que $f$ est *uniformément continue*.

**Définition 5.2.** Soit $(X,d)$ et $(Y,D)$ deux espaces métriques, et $f\colon X\to Y$. On dit que $f$ est *uniformément continue sur $X$* si

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X\ \forall x'\in X\ d(x,x')<\delta\Rightarrow D(f(x),f(x'))<\varepsilon\ .$$

Par rapport à la définition de la continuité, on a remplacé "$\forall x\in X\ \exists\delta>0$" par "$\exists\delta>0\ \forall x\in X$" : $\delta$ dépend toujours de $\varepsilon$, mais ne dépend plus de $x$. Toute fonction uniformément continue est continue, mais la réciproque est fausse.

**Exercice 5.3.** Montrer que la fonction $x\mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

**Définition 5.4.** Soit $(X,d)$ et $(Y,D)$ deux espaces métriques. On dit que $f\colon X\to Y$ est *lipschitzienne* s'il existe $K>0$ tel que

$$\forall x,x'\in X\ D(f(x),f(x'))\le Kd(x,x')\ .$$

**Propriété 5.5.** Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue. (Preuve en exercice.)

**Exercice 5.6.** Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable, et telle qu'il existe $M$ satisfaisant $|f'(x)|\le M$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Montrer que $f$ est lipschitzienne.

**Théorème 5.7.** *Soit $(X,d)$ et $(Y,D)$ deux espaces métriques, $f\colon X\to Y$ une fonction et $x\in X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

— *$f$ est continue en $x$.*
— *Pour toute suite $(x_n)$ d'éléments de $X$ qui converge vers $x$, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$.*

**Preuve:**

Supposons tout d'abord que $f$ est continue en $x$, et fixons une suite $(x_n)$ qui converge vers $x$ ainsi que $\varepsilon > 0$. D'une part il existe $\delta > 0$ tel que $D(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$ dès que $d(x, x') < \delta$ ; d'autre part il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x) \leq \delta$ pour tout $n \geq N$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a $d(f(x_n), f(x)) \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$.

Réciproquement, supposons que $f$ ne soit pas continue en $x$ :

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists y \in X \; d(x, y) < \delta \text{ et } d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon \; .$$

Fixons $\varepsilon > 0$ comme ci-dessus, et appliquons la propriété pour $\delta = \frac{1}{n}$ : ceci nous donne une suite $(y_n)$ telle que $d(x, y_n) < \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (en particulier, $(y_n)$ converge vers $x$) mais $d(f(y_n), f(x)) \geq \varepsilon$ (par conséquent, $f(y_n)$ ne converge pas vers $f(x)$).

**Théorème 5.8.** *Soit $(X, d)$ et $(Y, D)$ deux espaces métriques et $f\colon X \to Y$ une fonction. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$f$ est continue.*
2. *Pour tout ouvert $O$ de $Y$, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $X$.*
3. *Pour tout fermé $F$ de $Y$, $f^{-1}(F)$ est un fermé de $X$.*

On rappelle que $f^{-1}(A) = \{x \in X \colon f(x) \in A\}$ désigne l'*image inverse* de $A$ par $f$.

**Preuve:**

Supposons que $f$ est continue, et soit $O$ un ouvert de $Y$. Fixons $x \in f^{-1}(O)$, et considérons une suite $(x_n)$ qui tend vers $x$. Alors $f(x_n)$ tend vers $f(x)$ puisque $f$ est continue, donc $f(x_n)$ appartient à $O$ pour $n$ suffisamment grand puisque $f(x) \in O$ et $O$ est ouvert. Par conséquent, $x_n \in f^{-1}(O)$ pour $n$ suffisamment grand, ce qui nous montre que $f^{-1}(O)$ est ouvert, et on a montré que (1) $\Rightarrow$ (2).

Si (2) est vrai et $F$ est fermé dans $Y$, alors $Y \setminus F$ est ouvert et par hypothèse on obtient que $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ est ouvert dans $X$, autrement dit $f^{-1}(F)$ est fermé dans $X$. Ceci établit l'implication (2) $\Rightarrow$ (3), et en fait le même argument de passage au complémentaire donne l'implication réciproque (3) $\Rightarrow$ (2).

Il nous reste à prouver que (2) $\Rightarrow$ (1) ; supposons donc de nouveau que (2) soit vérifié, et considérons $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $B(f(x), \varepsilon)$ est un ouvert contenant $f(x)$, son image inverse est par hypothèse un ouvert contenant $x$, par conséquent il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, c'est-à-dire :

$$\forall x' \in X \; d(x, x') < \delta \to D(f(x), f(x')) < \varepsilon \; .$$

On a bien montré que $f$ est continue.

On voit dans cette preuve qu'il vaut mieux être à l'aise avec les propriétés de l'image inverse par une fonction... (Ce très important dans la partie du cours consacrée à la théorie de la mesure.)

**Exercice 5.9.** Soit $X, Y$ deux ensembles, $f\colon X \to Y$ une fonction. Montrer que, pour tout $A, B \subseteq Y$ on a $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

**Exercice 5.10.** Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f\colon x \mapsto x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants : $f([-3, -1])$, $f([-2, 1])$, $f([-3, -1] \cup [-2, 1])$ et $f([-3, -1] \cap [-2, 1])$. Les comparer.
2. Mêmes questions avec les ensembles $f^{-1}(]-\infty, 2])$, $f^{-1}([1, +\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty, 2] \cup [1, +\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty, 2] \cap [1, +\infty[)$.

**Proposition 5.11.** *Soit $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ et $(Z, d_Z)$ trois espaces métriques, ainsi que $f\colon Y \to Z$ et $g\colon X \to Y$ deux fonctions continues. Alors $f \circ g\colon X \to Z$ est continue.*

**Preuve:**

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $f$ est continue, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $y, y' \in Y$ on ait $d_Y(y, y') < \delta_1 \Rightarrow d_Z(f(y), f(y')) < \varepsilon$. Puis, comme $g$ est continue, il existe $\delta_2$ tel que pour tout $x, x' \in X$ on ait $d_X(x, x') < \delta_2 \Rightarrow d_Y(g(x), g(x')) < \delta_1$. On a alors, pour tout $x, x' \in X$ :

$$d_X(x, x') < \delta_2 \Rightarrow d_Y(g(x), g(x')) < \delta_1 \Rightarrow d_Z(f(g(x)), f(g(x')) < \varepsilon \ .$$

On vient de prouver que $f \circ g$ est continue.

**Exercice 5.12.** On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance induite par $\| \cdot \|_\infty$, et $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle. Montrer que les fonctions $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto xy$ sont continues.

**Exercice 5.13.** Soit $(X, d)$ un espace métrique et $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que la somme $f + g$ et le produit $fg$ sont également des fonctions continues.

**Exercice 5.14.** Soit $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ et $(Z, d_Z)$ trois espaces métriques, ainsi que $f \colon Y \to Z$ et $g \colon X \to Y$ deux fonctions uniformément continues. Montrer que $f \circ g \colon X \to Z$ est uniformément continue.

## 5.2 Suites de fonctions

Tout comme la continuité, les notions de convergence simple/uniforme de suites de fonctions qu'on connaît pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'étendent sans difficultés aux fonctions entre espaces métriques.

**Définition 5.15.** Soit $(X, d)$, $(Y, D)$ deux espaces métriques, et $(f_n)$ une suite de fonctions de $X$ dans $Y$. On dit que $(f_n)$ converge *simplement* vers une fonction $f \colon X \to Y$ si pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$ ; autrement dit :

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ D(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \ .$$

Ci-dessus, $N$ dépend à la fois de $\varepsilon$ et de $x$ ; comme dans la définition de la continuité, on pourrait demander que $N$ ne dépende que de $\varepsilon$, et on obtient ainsi la définition de la convergence *uniforme*.

**Définition 5.16.** Soit $(X, d)$, $(Y, D)$ deux espaces métriques, et $(f_n)$ une suite de fonctions de $X$ dans $Y$. On dit que $(f_n)$ converge *uniformément* vers une fonction $f \colon X \to Y$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \ \forall n \geq N \ D(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \ .$$

Bien entendu, la convergence uniforme entraîne la convergence simple. La réciproque est fausse, comme le montre l'exercice suivant.

**Exercice 5.17.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n \colon [0, 1] \to [0, 1]$ en posant

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \\ 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases} \ .$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, représenter le graphe de la fonction $f_n$, puis montrer que $(f_n)$ converge simplement vers une fonction $f$ que l'on déterminera. La convergence est-ele uniforme ? $f$ est-elle continue ?

On voit donc que la convergence simple ne préserve pas la continuité (ce qui est une bonne raison pour travailler avec des fonctions *mesurables* plutôt que des fonctions continues).

**Proposition 5.18.** *Soit $(X, d)$ et $(Y, D)$ deux espaces métriques, et $(f_n)$ une suite de fonctions continues de $X$ dans $Y$. Si $(f_n)$ converge uniformément vers $f \colon X \to Y$ alors $f$ est continue.*

**Preuve:**

Fixons $\varepsilon > 0$ et $x \in X$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $D(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in X$.
Fixons un tel $N$ ; comme $f_N$ est continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x' \in X$,

$$d(x, x') < \delta \Rightarrow D(f_N(x), f_N(x')) < \varepsilon.$$

Alors on a, pour tout $x' \in X$ tel que $d(x,x') < \delta$ :

$$\begin{aligned} D(f(x), f(x')) &\leq D(f(x), f_N(x)) + D(f_N(x), f_N(x')) + D(f_N(x'), f(x')) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\ &= 3\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon$ était quelconque, ceci suffit à démontrer que $f$ est continue en $x$.

**Propriété 5.19.** Une limite uniforme de fonctions uniformément continues est uniformément continue. (Preuve en exercice.)

# Chapitre 6

# Compacité

**Définition 6.1.** Soit $(X,d)$ un espace métrique. On dit que $(X,d)$ est *compact* s'il a la propriété suivante : pour toute suite $(x_n)$ d'éléments de $X$, il existe une sous-suite $(x_{n_k})$ qui converge dans $X$.

Un exemple fondamental d'espace compact est donné par un intervalle fermé borné (un *segment*) de $\mathbb{R}$ ou, plus généralement n'importe quelle partie fermée bornée de $\mathbb{R}$. On verra plus loin, Théorème 6.9 et Corollaire 6.13, qu'en fait les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont exactement ses parties fermées bornées.

**Théorème 6.2.** *Toute partie fermée bornée de $\mathbb{R}$, en particulier tout segment, est compacte.*

**Preuve:**

Considérons une suite $(x_n)$ d'éléments d'une partie $F$ fermée bornée de $\mathbb{R}$. Par la proposition 4.21, il existe une suite extraite $(x_{n_k})$ qui est monotone. Comme cette sous-suite est bornée et monotone, elle converge. Sa limite est dans $F$ car $F$ est fermé.

**Proposition 6.3.** *Soit $(X,d)$, $(Y,D)$ deux espaces métriques compacts. Alors $X \times Y$, muni de la distance produit, est encore un espace métrique compact.*

**Preuve:**

Soit $(x_n,y_n)$ une suite d'éléments de $X \times Y$. Par compacité de $(X,d)$, on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi_1(k)})$ qui converge vers $x \in X$. Et par compacité de $(Y,D)$, on peut extraire de $(y_{\varphi_1(k)})$ une nouvelle sous-suite $y_{\varphi_1(\varphi_2(l))}$ qui converge vers $y \in Y$.
Notons $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$. Alors la suite $(x_{\psi(l)}, y_{\psi(l)})$ est telle que $x_{\psi(l)}$ converge vers $x$ et $y_{\psi(l)}$ converge vers $y$, autrement dit, cette suite est une suite extraite de $(x_n,y_n)$ qui converge vers $(x,y)$.

**Corollaire 6.4.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$, l'ensemble $\prod[a_i,b_i]$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ muni de la distance induite par $\|\cdot\|_\infty$.

**Preuve:**

Chacun des espaces $[a_i,b_i]$ est compact, et par récurrence on montre facilement à partir de la proposition précédente qu'un produit fini d'espaces métriques compacts est compact.

**Théorème 6.5.** *Soit $(X,d)$ un espace métrique, et $A$ un sous-ensemble compact de $X$ (c'est-à-dire que $(A,d)$ est un espace métrique compact). Alors $A$ est fermé dans $X$.*

**Preuve:**

Soit $(x_n)$ une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $x \in X$ ; on doit prouver que $x \in A$. Comme $A$ est compact, il existe une sous-suite $(x_{n_k})$ qui converge vers $a \in A$ ; et $(x_{n_k})$ converge toujours vers $x$. Par unicité de la limite, $x = a \in A$.

Réciproquement, on a le résultat suivant.

**Proposition 6.6.** *Soit $(X,d)$ un espace métrique compact et $A$ une partie fermée de $X$. Alors $(A,d)$ est un espace métrique compact.*

**Preuve:**

Soit $(a_n)$ une suite d'éléments de $A$. Comme $X$ est compact et $(a_n)$ est aussi une suite d'éléments de $X$, il existe une sous-suite $(a_{n_k})$ qui converge vers $x \in X$ ; comme $A$ est fermé, $x \in A$, ce qui montre que $(a_n)$ a une sous-suite convergente dans $A$ : $(A, d)$ est compact.

La compacité est importante pour nous en particulier parce que les fonctions continues sur les espaces compacts ont des propriétés très fortes.

**Théorème 6.7.** *Soit $(X, d)$ un espace métrique compact, et $f: X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f$ est bornée et atteint ses bornes.*

**Preuve:**

Montrons que $f$ atteint sa borne supérieure $M = \sup(\{f(x): x \in X\})$ (l'argument pour la borne inférieure est symétrique, ou découle du résultat pour la borne supérieure appliqué à $-f$). Par définition d'une borne supérieure, il existe une suite $(x_n)$ d'éléments de $X$ telle que $f(x_n)$ converge vers $M$. Comme $(X, d)$ est compact, $(x_n)$ admet une sous-suite convergente $(x_{n_k})$ ; appelons $x$ sa limite. Alors $f(x_{n_k})$ converge à la fois vers $M$ (c'est une sous-suite d'une suite qui converge vers $M$) et vers $f(x)$ (par continuité de $f$). Par conséquent, $f(x) = M$.

La proposition suivante est une conséquence facile de ce théorème.

**Proposition 6.8.** *Tout espace métrique compact $(X, d)$ est* borné*, c'est-à-dire qu'il existe $M$ tel que pour tout $x, x' \in X$ on ait $d(x, x') \leq M$.*

**Preuve:**

La fonction $d: X \times X \to \mathbb{R}$ est continue lorsqu'on munit $X \times X$ de la distance produit $D$ ; en effet, elle est lipschitzienne :

$$\begin{aligned} |d(x_1, x_2) - d(x_1', x_2')| &= |d(x_1, x_2) - d(x_1, x_2') + d(x_1, x_2') - d(x_1', x_2')| \\ &\leq |d(x_1, x_2) - d(x_1, x_2')| + |d(x_1, x_2') - d(x_1', x_2')| \\ &\leq d(x_2, x_2') + d(x_1, x_1') \\ &\leq 2D((x_1, x_2), (x_1', x_2')). \end{aligned}$$

Comme $(X \times X, D)$ est compact, la proposition précédente nous permet de conclure que $d$ est bornée, ce qui revient à dire que $(X, d)$ est un espace métrique borné.

**Théorème 6.9.** *Dans $\mathbb{R}^n$ muni de la distance $d_\infty$ induite par $\| \cdot \|_\infty$, les compacts sont les fermés bornés.*

**Preuve:**

Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est tel que $(A, d)$ soit compact, alors on sait que $(A, d)$ doit être fermé dans $\mathbb{R}^n$, et borné d'après la proposition précédente.

Réciproquement, si $A$ est fermé borné dans $\mathbb{R}^n$, alors il existe $M$ tel que $A$ soit contenu dans $[-M, M]^n$ ; on a vu que cet ensemble est compact, et $A$ y est fermé, donc $(A, d)$ est compact.

**Théorème 6.10.** *Soit $(X, d)$ un espace métrique compact, $(Y, D)$ un espace métrique, et $f: X \to Y$ une fonction continue. Alors $f(X)$ est un sous-ensemble compact de $Y$.*

Notons que, une fois qu'on sait que les sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés, ce résultat généralise le théorème 6.7.

**Preuve:**

Soit $(y_n)$ une suite d'éléments de $f(X)$. Pour tout $n$ on peut choisir $x_n$ tel que $f(x_n) = y_n$, et ensuite on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{n_k})$ de la suite $(x_n)$. Par continuité de $f$, la suite $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ converge vers $y = f(x)$.

**Théorème 6.11** (Théorème de Heine)**.** *Soit $(X, d)$ un espace métrique compact, $(Y, D)$ un espace métrique, et $f: X \to Y$ une fonction continue. Alors $f$ est uniformément continue.*

**Preuve:**

On va montrer la contraposée : si $f$ n'est pas uniformément continue, alors $f$ n'est pas continue. Supposons donc que $f$ ne soit pas uniformément continue, c'est-à-dire qu'il est faux que

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, x' \in X \; d(x,x') < \delta \Rightarrow D(f(x), f(x')) < \varepsilon \; .$$

Autrement dit, notre hypothèse est que

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x, x' \in X \; d(x,x') < \delta \text{ et } D(f(x), f(x')) \geq \varepsilon \; .$$

Fixons $\varepsilon > 0$ comme ci-dessus. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on sait qu'il existe $x_n, x'_n$ tels que $d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$ et $D(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$.
Comme l'espace produit $X \times X$ est compact, on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{n_k}, x'_{n_k})$ de la suite $(x_n, x'_n)$ ; la suite $x_{n_k}$ converge vers $x \in X$, et la suite $x'_{n_k}$ converge vers $x' \in X$.
Puisque $n_k \to +\infty$ et $d(x_{n_k}, x'_{n_k}) \leq \frac{1}{n_k}$, on doit avoir $x = x'$. Mais on a aussi $D(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})) \geq \varepsilon$ pour tout $k$ : il est impossible que les deux suites $f(x_{n_k})$ et $f(x'_{n_k})$ convergent vers $f(x)$, par conséquent $f$ n'est pas continue en $x$.

**Théorème 6.12.** *Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.*

**Preuve:**

Soit $N$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On va montrer que $N$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ ; alors toutes les normes sont équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$, donc elles sont toutes équivalentes.
Notons $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $M = \max(\{N(e_i) \colon 1 \leq i \leq n\})$. Alors on a, pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ :

$$\begin{aligned} N(x) &= N(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) \\ &\leq |x_1| N(e_1) + \ldots + |x_n| N(e_n) \\ &\leq M(|x_1| + \ldots + |x_n|) \\ &\leq M.n.\|x\|_\infty \; . \end{aligned}$$

Cela nous donne une des deux inégalités nécessaires pour montrer que $N$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ ; cette inégalité implique aussi que $N \colon (\mathbb{R}^n, d_\infty) \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne et donc continue :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n \quad |N(x) - N(x')| \leq N(x - x') \leq Mn\|x - x'\|_\infty \; .$$

On a vu que les fermés bornés de $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ sont compacts ; par conséquent, l'ensemble

$$S = \{x \in [-1,1]^n \colon \exists k, \; x_k = \pm 1\}$$

(la sphère unité pour $\|\cdot\|_\infty$) est compact, et comme $N$ y est continue, elle y atteint son minimum $m$ ; notons que, comme $0 \notin S$, $m > 0$. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul ; le vecteur $\frac{x}{\|x\|_\infty}$ appartient à $S$, et on a donc $N(\frac{x}{\|x\|_\infty}) \geq m$.
Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $m\|x\|_\infty \leq N(x)$ (cette inégalité est bien sûr aussi vraie pour $x = 0$), et on a fini de prouver que $N$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

**Corollaire 6.13.** Pour n'importe quelle distance induite par une norme sur $\mathbb{R}^n$, les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés.

**Exercice 6.14.** Soit $(X,d)$ un espace métrique, et $(x_n)$ une suite d'éléments de $X$ qui converge vers $x \in X$. Montrer que l'ensemble $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

**Définition 6.15.** Soit $(X,d)$, $(Y,D)$ deux espaces métriques. Une fonction $f \colon X \to Y$ est un *homéomorphisme* si $f$ est une bijection telle que les fonctions $f$ et $f^{-1}$ soient continues.

**Proposition 6.16.** *Soit $(X,d)$, $(Y,D)$ deux espaces métriques compacts, et $f \colon X \to Y$ une bijection continue. Alors $f^{-1}$ est nécessairement continue, autrement dit, $f$ est un homéomorphisme.*

**Preuve:**

On doit montrer que la fonction $g = f^{-1}$ est continue. Soit $F$ un fermé de $X$ ; il nous suffit de montrer que $g^{-1}(F)$ est fermé dans $Y$. Pour cela, notons que

$$g^{-1}(F) = \{y \in Y : g(y) \in F\} = \{y \in Y : f^{-1}(y) \in F\} = f(F) .$$

D'après le théorème 6.10, $f(F)$ est compact ; comme les compacts sont fermés, on en déduit bien que $g^{-1}(F) = f(F)$ est fermé, ce qu'il fallait démontrer. □

**Définition 6.17.** Soient $X$ un espace topologique et $Y$ un sous-ensemble de $S$. Un recouverement (par des ouverts) de $Y$ est une famille des ouverts $\{U_i : i \in I\}$ telle que $Y \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Si $J \subset I$ et $Y \subset \bigcup_{i \in J} U_i$ alors $\{U_i : i \in J\}$ est un sous-recouvrement.

**Proposition 6.18.** ***(Lemme de Heine-Borel)*** *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $\{U_i : i \in I\}$ un recouvrement de $[a, b]$ où chaque $U_i$ est un intervale de $\mathbb{R}$ de longueur fini. Alors $\{U_i : i \in I\}$ contient un sous-recouvrement fini de $[a, b]$.*

**Preuve:**

Preuve par l'absurd. On note $E_1 = [a, b]$. Soit $E_1 = E_1' \cup E_2'$ où $E_1'$ et $E_2'$ sont des intervales fermés de longueur $\frac{b-a}{2}$. Un des intervales $E_1'$ ou $E_2'$ n'admet pas un sous-recouverement fini. Notons cet intervale par $E_2$. Par recurrence, on trouve une suite des intervales fermés $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$ tels que $\lambda(E_n) = \frac{\lambda(E_{n-1})}{2}$ pour tous $n > 1$ est aucun de $E_n$ n'admet pas un sous-recouverement fini. ($\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.) Soit $E_n = [a_n, b_n]$. Alors $\lim_n a_n = \lim_n b_n = c \in \bigcap_n E_n$. Il existe $U_i, i \in I$, qui contient $c$. Soit $U_i = (\alpha, \beta)$ et $\varepsilon = \min\{c - \alpha, \beta - c\}$. En choisissant $n$ tel que $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$ on obtient que $E_n \subset U_i$. Cotradiction. □

Le théorème suivant est admis.

**Théorème 6.19.** *Un espace métrique $(X, D)$ est compact si et seulement si chaque recouvrement de $X$ par des ouverts contient un sous-recouvrement fini.*