L3 : Mathématiques et Economie **21 octobre 2020**
2020–2021

CC1 : Topologie et théorie de la mesure

Durée : 1 heure 30 minutes

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS

Donner les définitions :

1. d'un espace topologique,
2. d'un espace topologique compact,
3. d'un ensemble négligeable,
4. d'une fonction étagée.

Donner les formulations :

1. du théorème de Heine,
2. du théorème définissant la tribu engendrée.

Exercice 1 Soient A_1, A_2, B_1, B_2 des parties de l'ensemble X.

1. Montrer que
$$(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2).$$
2. Est-ce que
$$(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) = (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2)?$$
Justifiez votre réponse.

Exercice 2 Soit X un espace topologique. On dit que X est *connexe* si X ne se représente pas comme union de deux ensembles ouverts, non-vides et disjoints.

1. Montrer que X est connexe si et seulement si X ne se représente pas comme union d'un nombre fini $n \geq 2$ de fermés, non-vides et deux à deux disjoints.
2. Supposons que X est connexe. Soient Y un espace métrique et $f : X \to Y$ une application continue telle que $\mathrm{Im}(f)$ est fini. Montrer que f est constant. (Indication : On pourrait démontrer que chaque singleton de l'espace métrique Y est fermé.)

Exercice 3 Soit $f : X \to Y$ une application.

1. On a vu dans le cours que pour toute tribu $\mathcal{T}$ sur Y
$$f^{-1}(\mathcal{T}) = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{T}\}$$
est une tribu sur X. Déterminer $f^{-1}(\mathcal{T})$ si $Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($\equiv$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$) et $f : X \to \mathbb{R}$ est l'application constante $f(x) = 0$.

2. Soit $\mathcal{E}$ une tribu sur X.
   (a) Montrer que
$$f\big(\mathcal{E}\big) := \big\{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{E}\big\}$$
   est une tribu sur Y.
   (b) Soient $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $a \in Y$ et $f : \mathbb{R} \to Y$ l'application constante $f(x) = a$. Déterminer $f\big(\mathcal{E}\big)$ dans ce cas.

Exercice 4 Soit $\mathcal{C}$ un clan sur Ω. Désignons par $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ la classe monotone engendrée par $\mathcal{C}$ et par $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Montrer que $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \mathcal{T}(\mathcal{C})$. (Indication : Quelle est la formulation du théorème des classes monotones ?)