L3 : Mathématiques et Economie **20 octobre 2021**
2021–2022

CC1 : Topologie et théorie de la mesure

Durée : 1 heure 30 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.
Vos réponses doivent être justifiées.

Donner les définitions :

1. de deux distances équivalentes,
2. de l'intérieur et de l'adhérence d'un sous-ensemble d'un espace topologique,
3. d'une tribu,
4. d'une fonction mesurable.

Donner les formulations :

1. du théorème de Heine,
2. du théorème décrivant les compacts de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel réel normé de dimension ≥ 1. Soit $M \subset E$. Démontrer ou réfuter (en proposant des contre-exemples) les assertions suivantes :

1. Si M est constitué d'un seul point alors M est fermé.
2. Si M est fini alors M est fermé.
3. Si M est dénombrable alors M est fermé.
4. Si M n'est pas fermé alors M est ouvert.

Exercice 2 Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4y^2 \leq 1\}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}.$$

1. Montrer que A est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\exists (x_0, y_0) \in A$, $f(x_0, y_0) = \inf\limits_{(x,y)\in A} f(x,y)$.

Exercice 3 Soient (E, d_1), (F, d_2) et (G, d_3) trois espaces métriques. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que pour tout $C \subset G$, on a $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right)$.
2. En déduire que si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

Exercice 4 Soit $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ et soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ où $\mathcal{E} = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\}\}$.

1. On se propose de trouver la tribu $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ engendrée par $\mathcal{E}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{T}(\mathcal{E}')$ où $\mathcal{E}' = \{\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$.
   (b) Conclure.
2. Trouver le clan $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ et la classe monotone $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ engendrés par $\mathcal{E}$.