L3 : Mathématiques et Economie **27 novembre 2019**
2019–2020

CC2 : Théorie de la mesure et topologie

Durée : 1 heure

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES
Un barême est donné à titre indicatif. (il est donc susceptible de changer).

Question de Cours (8 points) :

1. Énoncer l'inégalité de Jensen
2. Énoncer l'un des théorèmes de Fubini
   (au choix le théorème de Fubini-Tonelli OU le théorème de Fubini).
3. Énoncer la caractérisation de la complétude en terme de séries.
4. Énoncer le théorème de caractérisation de la continuité des applications linéaires entre espaces vectoriels normés.

Exercice 1 (3 points) Montrer que pour tout $x > 0$, on a l'inégalité :

$$\frac{1}{x^4} \geq 5 - 4x.$$

Exercice 2 (12 points) On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x,y) = \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(y-1)^4}{4}$$

sur l'ensemble $C := \{(x,y) \in [0,1] \times [0,8] : y \leq 8 - 8x\}$.

1. Montrer que C est convexe.
2. **(2 points)** Calculer le cône normal $N_C(0)$. (justifier)
3. Prouver que f est convexe sur C.
4. Est-ce que f est strictement convexe sur C ? (justifier)
5. Montrer qu'il existe une unique solution du problème de minimisation de f sur C.
6. **(4 points)** Montrer que f atteint son minimum sur C en $(\frac{15}{17}, \frac{16}{17})$. (justifier)

Exercice 3 (4 points)
On définit la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Pourquoi G est-elle bien définie ?
3. Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$.