L3 : Mathématiques et Economie **27 novembre 2019**
2019–2020

CC2 : Théorie de la mesure et topologie

Correction

Question de Cours (8 points) : (cf cours)

Exercice 1 (3 points) Montrer que pour tout $x > 0$, on a l'inégalité :

$$\frac{1}{x^4} \geq 5 - 4x.$$

Correction : On pose $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \frac{1}{x^4}$. On a f de classe C^∞ sur son domaine comme inverse de polynôme à dénominateur non-nul. $f'(x) = -4x^{-5}$, $f''(x) = 20x^{-6} \geq 0$. Donc f est convexe sur $]0, +\infty[$. Elle vérifie donc l'inégalité :

$$f(x) - f(1) \geq f'(1)(x - 1) = -4(x - 1).$$

Comme $f(1) = 1, f'(1) = -4$ cela donne :

$$\frac{1}{x^4} \geq 1 - 4(x - 1) = 5 - 4x.$$

Exercice 2 (12 points) On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x, y) = \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(y-1)^4}{4}$$

sur l'ensemble $C := \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 8] : y \leq 8 - 8x\}$.

1. (1 point) Montrons que C est convexe. $A = [0, 1] \times [0, 8]$ est convexe comme produit d'intervalles. Soit $g(x, y) = y + 8x - 8$ qui est affine donc convexe, donc $g^{-1}(]-\infty, 0])$ est convexe. Par intersection de convexes, $C = A \cap g^{-1}(] - \infty, 0])$ est convexe.
2. **(2 points)** Montrons que le cône normal $N_C(0) =] - \infty, 0]^2$.
   D'abord si $(x, y) \in C$ (donc $x \geq 0, y \geq 0$) et $(x', y') \in] - \infty, 0]^2$, $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy' \leq 0$. Donc

   $$] - \infty, 0]^2 \subset N_C(0).$$

   Réciproquement, $0 \in [0, (1, 0)] =: I_1 \subset C$ donc

   $$N_C(0) \subset N_{I_1}(0) = (\mathbb{R}(1, 0))^\perp + \mathbb{R}_+(-1, 0) =] - \infty, 0] \times \mathbb{R}.$$

   et $0 \in [0, (0, 8)] =: I_2 \subset C$ donc

   $$N_C(0) \subset N_{I_2}(0) = (\mathbb{R}(0, 8))^\perp + \mathbb{R}_+(0, -8) = \mathbb{R}\times] - \infty, 0].$$

   En combinant les deux, on obtient l'inclusion inverse voulue :

   $$N_C(0) \subset \mathbb{R}\times] - \infty, 0] \cap] - \infty, 0] \times \mathbb{R} =] - \infty, 0]^2.$$

3. Prouvons que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$ et donc a fortiori sur C.

   f polynomiale donc de classe C^∞, Sa hessienne est $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 3(x-1)^2 & 0 \\ 0 & 3(y-1)^2 \end{pmatrix}$ est diagonale à coefficients positifs (donc à valeurs propres positives) donc positive. Par caractérisation différentielle de la convexité, f est convexe sur $\mathbb{R}^2$ et donc a fortiori sur C.

4. Est-ce que f est strictement convexe sur C ? Oui mais ce n'est pas simple.

   Mais, les valeurs propres de $Hf(x,y)$ sont strictement positives sur $(\mathbb{R} - \{1\})^2$ mais C rencontre les deux droites d'annulations $x = 1, y = 1$. On ne peut pas utiliser la condition suffisante de différentiabilité telle quel. Attention, la condition n'est pas nécessaire, donc on ne peut JAMAIS déduire d'une annulation du déterminant de la hessienne qu'une fonction n'est pas strictement convexe.

   On utilise le résultat vu en TD que $g(x) = x^4$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$. On remarque que $4f(x,y) = g(x-1) + g(y-1)$. Pour montrer que f (ou $4f$) est strictement convexe, on utilise pour $\lambda \in]0,1[, x \neq x'$ par convexité stricte de g :

   $$(A) \qquad g(\lambda x+(1-\lambda)x'-1) = g(\lambda(x-1)+(1-\lambda)(x'-1)) < \lambda g(x-1)+(1-\lambda)g(x'-1).$$

   Idem en remplaçant x, x' par y, y' ce qui donne (B). En sommant (A) et (B) si $x \neq x'$ ou $y \neq y'$ (et l'égalité des deux membres si on a égalité) on obtient ce qu'on voulait pour $\lambda \in]0,1[, (x,y) \neq (x',y')$:

   $$f(\lambda(x,y) + (1-\lambda)(x',y')) < \lambda f(x,y) + (1-\lambda)f(x',y').$$

   f est donc strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ donc sur C.

5. Montrer qu'il existe une unique solution du problème de minimisation.

   f est continue sur C car polynomiale. C est borné et fermé (comme au 1, intersection d'une boule fermé et de l'image inverse d'un intervalle fermé par une application continue) dans $\mathbb{R}^2$, donc compact. L'application continue f atteint son minimum sur C d'où l'existence d'une solution.

   f est strictement convexe sur C (convexe) donc, par le cours, le minimum est unique.

6. Trouvons l'unique point où f atteint son minimum sur C. (justifier)

   Méthode 1 : (en utilisant le théorème du cours sans calcul exact du cône normal) $\nabla f(x,y) = ((x-1)^3, (y-1)^3)$ (s'annule en (1,1) en dehors de l'intérieur de C, donc le minimum sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas pertinent.)

   Calculons $\nabla f(a) = ((15/17-1)^3, (16/17-1)^3) = -(8,1)/17^3$. Par le théorème de caractérisation des minima d'une fonction C^1 convexe sur un convexe, il suffit de montrer que $-\nabla f(a) \in N_C(a)$ pour que f atteigne son minimum en $a = (\frac{15}{17}, \frac{16}{17})$.

   Comme $N_C(a)$ est un cône, il suffit de voir $(8,1) \in N_C(a)$. Soit $(x,y) \in C$, on a

   $$\langle (x,y)-a, (8,1)\rangle = 8(x-15/17)+1(y-16/17) = 8x+y-(8\times 15+8\times 2)/17 = 8x+y-8 \leq 0.$$

   Donc on obtient que $(8,1) \in N_C(a)$.

   Méthode 2 : (en utilisant le théorème du cours avec calcul du cône normal) On montre d'abord que $N_C((\frac{15}{17}, \frac{16}{17})) = \mathbb{R}_+(8,1) = \{(8\lambda, \lambda) : \lambda \geq 0\}$.

   $a = (\frac{15}{17}, \frac{16}{17}) \in S := [(1,0),(0,8)] \subset C$ Donc, par monotonie du cône normal et le cours :$N_C(a) \subset N_S(a) = \mathbb{R}(-1,8)^\perp = \mathbb{R}(8,1)$. Il y a deux directions dans cette droite, il suffit de voir que seule $(8,1)$ est dans le cône. D'abord $(-8,-1) \notin N_C(a)$ car $\langle (0,0)-a, (-8,-1)\rangle = 8\frac{15}{17} + \frac{16}{17} > 0$ et $(0,0) \in C$. On conclut donc que

$$N_C(a) \subset \mathbb{R}_+(8,1).$$

Soit $(x,y) \in C$, on a

$$\langle (x,y)-a, (8,1)\rangle = 8(x-15/17)+1(y-16/17) = 8x+y-(8\times15+8\times2)/17 = 8x+y-8 \leq 0.$$

Donc on obtient que $(8,1) \in N_C(a)$ et donc comme le cône normal est un cône :

$$\mathbb{R}_+(8,1) \subset N_C(a).$$

$\nabla f(x,y) = ((x-1)^3, (y-1)^3)$ (s'annule en (1,1) en dehors de l'intérieur de C, donc le minimum sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas pertinent.)
Calculons $\nabla f(a) = ((15/17-1)^3, (16/17-1)^3) = -(8,1)/17^3$, donc $-\nabla f(a) \in N_C(a)$; Par le théorème de caractérisation des minima d'une fonction C^1 convexe sur un convexe, on déduit que f atteint son minimum en $a = (\frac{15}{17}, \frac{16}{17})$.
Méthode 3 : (sans le théorème du cours) $\nabla f(x,y) = ((x-1)^3, (y-1)^3)$ (s'annule en (1,1) en dehors de l'intérieur de C donc f n'atteint pas son unique minimum sur l'intérieur de C.)
On regarde la restriction de f à la droite $y = 8-8x$ et on cherche si f a un point critique sur $S = \{(x,y) \in]0,1[\times\mathbb{R}, y = 8-8x\}$.
$g(x) = f(x, 8-8x) = \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(7-8x)^4}{4}$
Alors $g'(x) = (x-1)^3 - 8(7-8x)^3$. Un point critique de g vérifie $g'(x) = 0$ soit $(x-1)^3 = 8(7-8x)^3$. Comme $x \mapsto x^3$ est une bijection on déduit soit $x-1 = 2(7-8x)$. La solution vérifie $x = 15-16x$ soit $x = 15/17$. g (étant convexe par composée de f avec une application linéaire) atteint donc un minimum sur]0,1[en $x = 15/17$. Donc f atteint un minimum sur $S = \{(x,y) \in]0,1[\times\mathbb{R}, y = 8-8x\}$ en $a = (\frac{15}{17}, \frac{16}{17})$. On remarque que $f(a) = \frac{16+1}{4.17^4} = \frac{1}{4.17^3}$. Il reste à montrer que ce minimum sur S est aussi le minimum sur C.
On a vu a la question précédente que f atteint son minimum sur C en un certain b, il suffit donc d'exclure les autres bords.

— sur $x = 0$, $f(0,y) = \frac{(0-1)^4}{4} + \frac{(y-1)^4}{4}$ atteint son minimum en $y = 1 \in [0,8]$ $f(0,1) = 1/4 > \frac{1}{4.17^3}$. Donc le minimum de f sur C n'est pas atteint sur $[0,(0,8)]$.
— sur $y = 0$, $f(x,0) = \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{1}{4}$ atteint son minimum en $x = 1 \in [0,1]$ de valeur $f(0,1) = 1/4 > \frac{1}{4.17^3}$. Donc le minimum de f sur C n'est pas atteint sur $[0,(1,0)]$.

En bilan, on a exclu l'intérieur $Int(C) = \{(x,y) \in]0,1[\times]0,8[: y < 8-8x\}$ (on n'a pas vraiment besoin de savoir que c'est l'intérieur de C juste que c'est un ouvert inclus dedans, ce qui se montre comme pour C fermé) et les deux autres bords, donc f doit atteindre son unique minimum sur S, et c'est donc celui qu'on a obtenu précédemment, à savoir $f(a) = \frac{16+1}{4.17^4} = \frac{1}{4.17^3}$ atteint en a.

Exercice 3 (4 points)
On définit la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt.$$

1. Montrons que $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$.

   On connait la primitive $\int_{-A}^{A} \frac{1}{1+t^2} dt = arctan(A) - arctan(-A)$, en prenant la limite $A \to \infty$, on obtient :

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi < \infty$$

   Comme g est continue, donc mesurable, et positive, d'intégrale finie, on déduit que g est intégrable.

2. Pour montrer que G est bien définie sur $\mathbb{R}$, il suffit de noter que l'intégrande $h(x,t) = \frac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est dominée par $|h| \leq g$ avec g intégrable. Comme h est continue du couple, donc mesurable, on déduit que h est intégrable en t, donc G est bien définie.

3. Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$.

   h est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme quotient de fonctions continues (composée de cosinus et de polynômes) à dénominateur non nul.

   $|h(x,t)| \leq g(t)$ est une domination par une fonction intégrable (qui vient du fait que le cosinus varie dans $[-1,1]$).

   Par le théorème de continuité avec condition de domination (corollaire dans le cas C^k avec $k = 0$), on obtient que G est continue sur $\mathbb{R}$.